Оптимальная фильтрация сигналов в атмосферном шуме

А.С. Юрков

08.02.2002г.

1 Общие соотношения

Пусть в результате приема получен сигнал $S(t)$ о котором известно, что он есть сумма полезного сигнала $U_c(t)$ и шума $U_ш(t)$. Будем также считать, что для шума и сигнала заданы априорные статичтические функционалы (функционалы плотности вероятности).

Апостериори (после того, как сигнал принят и записан) $S(t)$ - детерминированный сигнал. Необходимо найти наиболее вероятный полезный сигнал $U_c(t)$. Ясно, что "вероятность" реализации некоторого $U_c(t)$ это априорная вероятность реализации шума, равного $S(t)-U_c(t)$ умножить на априорную вероятность $U_c(t)$.

Если статистические функционалы шума и сигнала обозначить как $P_ш[U_ш(t)]$ и $P_c[U_c(t)]$ соответственно, то апостериорная вероятность $U_c(t)$ равна:

$$P_c^{(ps)}[U_c(t)] = P_ш[S(t) - U_c(t)]P_c[U_c(t)]$$

Таким образом, задача нахождения сигнала $U_c(t)$, максимизирующего $P_c^{(ps)}[U_c(t)]$ сводится к приравниванию нулю вариационной производной:

$$\frac{\delta}{\delta U_c} P_ш[S(t) - U_c(t)]P_c[U_c(t)] = 0$$

Удобнее работать не со статистическим функционалом P_i а с его логарифмом $W_i = \ln P_i$. В терминах W_i, после очевидного преобразования, условие оптимальности фильтрации принимает вид:

$$\frac{\delta}{\delta U_c} W_ш[S(t) - U_c(t)] + \frac{\delta}{\delta U_c} W_c[U_c(t)] = 0 \qquad (1)$$

2 Статистический функционал стационарного гауссовского процесса

$$P_G[x(t)] = e^{-\int x(t)Ax(t)dt}$$

где A - некоторый линейный оператор, который без ограничения общности можно считать симметричным.

Установим связь между коррелятором $K(t) =< x(t)x(0) >$ и оператором, обратным к A.

$$K(t) = \frac{\int \cdots \int x(t)x(0)e^{-\int x(t')Ax(t')dt'} \mathcal{D}x}{\int \cdots \int e^{-\int x(t')Ax(t')dt'} \mathcal{D}x} \qquad (2)$$

где символом $\int \cdots \int \ldots \mathcal{D}x$ обозначен континуальный интеграл.

Вычислить континуальный интеграл, стоящий в числителе формулы (2), можно с помощью техники производящих функционалов. Определим производящий функционал $Z[J(t)]$:

$$Z[J(t)] = \int \cdots \int e^{-\int x(t)Ax(t)dt + \int x(t)J(t)dt} \mathcal{D}x \qquad (3)$$

Очевидно, что:

$$< x(t_1)x(t_2) >= \left. \frac{\frac{\delta^2}{\delta J(t_1)\delta J(t_2)} Z[J]}{Z[J]} \right|_{J=0}$$

$Z[J]$ легко выразить через $Z[J = 0]$ с помощью линейной функциональной замены переменной в (3):

$$x'(t) = x(t) + \xi(t)$$

$$\mathcal{D}x' = \mathcal{D}x$$

$$Z[J] = \int \cdots \int e^{-\int [x'Ax' - \xi Ax' - x'A\xi + \xi A\xi - x'J + \xi J]dt} \mathcal{D}x' \qquad (4)$$

Теперь выберем $\xi(t)$ так, чтобы линейные по $x'(t)$ члены в показателе экспоненты обратились тождественно в ноль. Для этого $\xi(t)$ должно удовлетворять уравнению:

$$\int [\xi(t)Ax'(t) + x'(t)A\xi(t) + x'(t)J(t)]dt = 0$$

Это уравнение уравнение должно удовлетворяться при любой функции $x'(t)$, что при условии самосопряженности A дает:

$$\xi(t) = -\frac{1}{2}A^{-1}J(t) \tag{5}$$

Подставляя (5) в (4) и вынося из-под континуального интеграла сомножители, не зависящие от функциональной переменной интегрирования получим:

$$Z[J(t)] = e^{\frac{1}{4}\int J(t)A^{-1}J(t)dt}Z[J=0] \tag{6}$$

Пусть $G(t_1, t_2)$ - ядро оператора A^{-1}. То есть:

$$A^{-1}J(t) = \int G(t,t')J(t')dt'$$

Очевидно, что для стационарного процесса $G(t_1, t_2)$ зависит лишь от разности аргументов. Тогда:

$$Z[J(t)] = e^{\frac{1}{4}\int\int J(t_1)G(t_1,t_2)J(t_2)dt_1dt_2}Z[J=0]$$

Вычисляя вторую вариационную производную, получим:

$$< x(t_1)x(t_2) >= \frac{1}{4}[G(t_1,t_2) + G(t_2,t_1)] \tag{7}$$

Таким образом, ядро оператора A^{-1} с точностью до множителя и симметризации относительно перестановки аргументов совпадает с коррелятором $< x(t_1)x(t_2) >$. Так как ядро оператора A^{-1} можно считать симметричным, получим: $K(t) = \frac{1}{2}G(t,0)$.

3 Лоренцевский шум

Как показывают эксперименты, шум атмосферных разрядов весьма далек по своей функции распределения от гауссовского шума. Автором введен новый вид шума, который назван лоренцевским. Представляется, что такая модель шума должна лучше описывать помехи радиоприему, вызванные атмосферными разрядами. Название "лоренцевский" происходит от того, что в качестве одноточечной функции распределения принята известная функция Лоренца.

Если считать шум δ-коррелированным, то статистический функционал лоренцевского шума задается следующим образом:

$$P_{л}[x(t)] = e^{W_{л}[x(t)]}$$

где

$$W_{л}[x(t)] = -\beta \int \ln[1 + x^2(t)]dt$$

Здесь β - некий численный параметр и, для упрощения выкладок, принята определенная нормировка амплитуды сигналов. В общей нормировке под логарифмом вместо единицы должен стоять некий численный параметр.

4 Фильтрация гауссовского сигнала в гаусовском шуме

Задача фильтрации в гаусовском шуме очень подробно рассмотрена в известной литературе. Здесь эта задача кратко рассматривается лишь для связности изложения и удобства сравнения со случаем лоренцевского шума.

Если как полезный сигнал, так и шум являются стационарными гауссовскими процессами, то уравнение (1) принимает вид:

$$\frac{\delta}{\delta U_c} \int [S(t) - U_c(t)] A_{ш} [S(t) - U_c(t)]dt + \frac{\delta}{\delta U_c} \int U_c(t) A_c U_c(t)dt = 0$$

где $A_{ш}$ и A_c - операторы, характеризующие статистические свойства шума и полезного сигнала соответственно. Учитывая самосопряженности этих операторов и вычисляя вариационные производные, получим:

$$(A_ш + A_c)U_c(t) = A_ш S(t)$$

Разрешая это уравнение относительно $U_c(t)$, получим уравнение, описывающее оптимальную фильтрацию гаусовского сигнала в гаусовском шуме:

$$U_c = (1 + A_ш^{-1} A_c)^{-1} S(t)$$

Необходимо отметить, что все операторы, фигурирующие в данной теории (операторы свертки), имеют одинаковую систему собственных функций (функции вида $e^{j\omega t}$). Поэтому они все являются коммутирующими. Этот факт позволяет записать полученное уравнение также в виде:

$$U_c(t) = \frac{A_c^{-1}}{A_c^{-1} + A_ш^{-1}} S(t) \tag{8}$$

Переходя к фурье-образам и учитывая связь ядер операторов A_c^{-1} и $A_ш^{-1}$ с корреляторами, получим:

$$U_c(\omega) = \frac{K_c(\omega)}{K_c(\omega) + K_ш(\omega)} S(\omega) \tag{9}$$

Таким образом, оптимальный фильтр должен иметь функцию передачи вида:

$$K_{опт.ф.}(\omega) = \frac{K_c(\omega)}{K_c(\omega) + K_ш(\omega)} \tag{10}$$

Заметим, что в данном варианте теории $K_{опт.ф.}(\omega)$ является действительной величиной при всех частотах. Естественно, это следствие того, что рассматривается "фильтрация в целом", то есть не в реальном времени. Однако отличие от фильтрации в реальном времени непринципиально. При фильтрации в реальном времени дополнительно появится лишь фазовый множитель, описывающий временную задержку, которая обязательно должна быть в любом реальном фильтре.

Очень интересно проанализировать полученное выражение (10). Во первых ограничемся случаем белого шума, то есть случаем, когда $K_ш(\omega) = const$. Из полученного выражения видно, что оптимальная частотная характеристика фильтра при этом зависит от соотношения сигнал/шум. В частности, если сигнал занимает ограниченную полосу частот от ω_1 до

ω_2, то в пределе больших соотношений сигнал/шум оптимальный фильтр это фильтр с прямоугольной частотной характеристикой.

В то же время, в литературе можно встретить утверждение, что оптимальный фильтр это фильтр с функцией передачи комплексно сопряженной со спектром сигнала. Здесь же получилось иначе... Что же в литературе ошибка? Нет конечно! Просто разная постановка задачи, разные критерии оптимальности. Критерий оптимальности данной работы больше соответствует "обычной радиосвязи" (например однополосной радиотелефонной). В то же время функция передачи фильтра, сопряженная со спектром сигнала, возникает в задачах обнаружения или измерения параметра сигнала.

Тема различных критериев оптимальности фильтров является очень интересной, но так как данная работа посвящена всеже другому, на этом ограничемся.

5 Фильтрация гауссовского сигнала в лоренцевском шуме.

В случае, когда сигнал является гаусовским а шум - лоренцевским, основное уравнение (1) принимает вид:

$$\frac{\delta}{\delta U_c}\beta\int \ln[1+(S-U_c)^2]dt+\frac{\delta}{\delta U_c}\int U_c A_c U_c dt=0$$

Вычисляя вариационные производные и производя некоторые преобразования, получим:

$$U_c=\beta A_c^{-1}\frac{S-U_c}{1+(S-U_c)^2}$$

В этом уравнении оператор A^{-1} представлен символически. Если его представить в виде оператора свертки, то это уравнение примет вид:

$$U_c(t)=\beta\int G_c(t-t')\frac{S(t')-U_c(t')}{1+[S(t')-U_c(t')]^2}dt'$$

Учитывая связь $G_c(t)$ с корреляционной функцией сигнала $K_c(t)$, получаем окончательно:

$$U_c(t)=2\beta\int K_c(t-t')\frac{S(t')-U_c(t')}{1+[S(t')-U_c(t')]^2}dt' \qquad (11)$$

Мы видим, что оптимальная обработка сигнала в случае лоренцевского шума принципиально отличается от случая гауссовского шума. Алгоритм является нелинейным и описывается достаточно сложным нелинейным интегральным уравнением.

Из простых вариантов решения уравнения (11) можно предложить лишь только решение методом итераций. При этом первая итерация дает:

$$U_c(t) = 2\beta \int K_c(t-t') \frac{S(t')}{1+S^2(t')} dt' \tag{12}$$

Очевидно такая итерация должна быть приближенно справедлива при малом соотношении сигнал/шум. В этом случае оптимальный обработчик сигнала разбивается на два каскада: сначала безинерционная нелинейная цепь с амплитудной характеристикой $U_{вых} = U_{вх}/(1+U_{вх}^2)$, затем линейный фильтр с частоной характеристикой равной энергетическому спектру полезного сигнала.

Интересно отметить, что такая обработка весьма похожа на старую-добрую систему ШОУ (широкая полоса, ограничение, узкая полоса). Отличие заключается в том, что сильные "выбросы" принимаемого сигнала не только ограничиваются. но более того - подавляются. Действительно, амплитудная характеристика нелинейного звена при малых входных напряжениях линейна, далее она переходит в насыщение а затем падает. То есть приемник при больших "выбросах" входного сигнала должен вообще "запираться".

Таким образом, в случае лоренцевского шума алгоритм оптимальной обработки отличается от оптимального алгоритма в случае гауссовского шума. П редставляется, что более адекватный учет характера функции распределения шума позволит поднять реальную чуствительность радиоприемных устройств.

Аналогично изложенному выше нетрудно рассмотреть также задачу измерения амплитуды сигнала и задачу обнаружения сигнала. Для этих задач алгоритм оптимальной обработки также является нелинейным и в первой итерации сводится к нелинейному безинерционному преобразованию, аналогичному тому, что рассмотрено выше, с последующей обработкой, аналогичной случаю гауссовского шума.

Возможно также построение теории для произвольной, в том числе экспериментально измеренной функции распределения шума. Можно также предложить адаптивные алгоритмы, автоматически "приспосабливающиеся" к рельной шумовой обстановке. Но обсуждение этих вопросов выходит за рамки данной работы.