<u>TÓPICOS SOBRE LINHAS DE TRANSMISSÃO EM RF</u>

Por Luiz Amaral
PY1LL / AC2BR

Introdução

Apesar do assunto Linhas de Transmissão ser muito apresentado na literatura, muitos tópicos sobre elas parecem não serem abordados. Aqui tentamos mostrar certas características delas que, além de pouco conhecidas de um modo geral, podem ajudar bastante na compreensão das mesmas.
Não trataremos de assuntos relativos às Linhas em Paralelo ou Stubs Reais que estão apresentados em outros trabalhos de nossa autoria (vide **Referências**) e alguns exemplos aqui são apenas acadêmicos sem nenhuma aplicação direta, mas que ajudam a compreensão.

Alguns conceitos importantes

A impedância de um dispositivo ou sistema (não necessariamente elétrico) no caso geral apresenta duas componentes, a reativa (componente imaginária) e a dissipativa (componente real). De um modo amplo, reatância é a propriedade que um sistema tem de devolver toda a energia que lhe é entregue. Dissipação é a propriedade que um sistema apresenta de não devolver a energia que lhe é entregue. Como a reatância é definida para certa frequência, esta e consequentemente a impedância são conceitos válidos para sistemas bem comportados (lineares e independentes do tempo) em regime senoidal. Costuma-se, por extensão, usá-los também em outros regimes e sistemas, mas seus conceitos são, rigorosamente, para os regimes senoidais de sistemas simples e, portanto, repetitivos de período em período. No caso elétrico, a componente dissipativa é também chamada de resistiva.
Assim, se um sistema é puro dissipativo, sua impedância é real e, se puro reativo, sua impedância é imaginária. Um sistema geral tem as duas componentes e, portanto, sua impedância é complexa.
O espaço livre, por exemplo, não devolve a energia de uma onda eletromagnética por esta não retornar (não há reflexões para gerar o retorno) e, portanto, é dissipativo.
Mas surge uma questão curiosa: a impedância característica **Zo** de uma linha é real justamente quando a linha é ideal, ou seja, não dissipativa. Não seria uma inconsistência? A resposta é não.
Se a impedância na entrada da linha é medida e é encontrado o valor **Zo**, dois casos são possíveis: ou a impedância está casada com uma carga resistiva igual à **Zo** (o gerador 'vê' a carga que é real), ou a linha tem comprimento infinito, quando não há onda refletida; em ambos os casos a energia não retorna e a impedância tem de ser real (no caso **Zo**).
Num sistema senoidal de frequência **f**, escolhe-se duas variáveis dinâmicas (senoidais de mesma frequência **f**) **X** e **Y** cujo produto seja a potência (ou densidade de potência no caso das ondas) instantânea **P**. Assim:

$$\mathbf{P = X.Y}$$

Mas a potência é a rapidez de transferência da energia no sistema e então:

$$\mathbf{P = dE/dt}$$

Daí escreve-se:

$$\mathbf{E = \int P.dt = \int X.Y.dt}$$

Como **X** e **Y** são senoidais de frequência **f**, podem ser escritos como:

$$\mathbf{X = Xo.sen(2.\pi.f)}$$
$$\mathbf{Y = Yo.sen(2.\pi.f + \varphi)}$$

onde **φ** é a defasagem entre as duas variáveis e **Xo** e **Yo** são suas respectivas amplitudes constantes. Pondo essas definições na integral da energia, com o tempo de integração igual ao período **T**, temos:

$$\mathbf{E = Xo.Yo.\int_0^T sen(2.\pi.f).sen(2.\pi.f + \varphi).dt = Xo.Yo.T.cos(\varphi)/2}$$

A energia entregue é, assim**,** proporcional ao cosseno do ângulo de defasagem. Mas quando **φ = 0**, **cos(φ) = 1** e, portanto, a energia transferida é máxima, ou seja, nada é devolvido. Se **φ = ± π/2**, **cos(φ) = 0** e a energia transferida é nula, ou seja, tudo é devolvido. Concluímos, portanto, que, no 1º caso, o sistema é dissipativo e, no 2º, reativo.
Assim, se um elemento de circuito é reativo puro (indutor ou capacitor ideais), a tensão e a corrente (as duas variáveis de frequência **f** do sistema cujo produto é a potência instantânea) estão defasadas entre si de **± π/2** e, se o elemento for um resistor puro, a tal defasagem é nula.
Também numa linha ideal infinita, como não há devolução da energia entregue, a impedância é real e a linha é vista como dissipativa (uma afirmação também discutível por estar o sistema em regime estacionário envolvendo tempos infinitos).
No caso de uma onda no espaço livre, acontece a mesma coisa com o campo elétrico e o campo magnético em cada ponto do espaço (a defasagem entre ambos é nula), onde aqui apenas a potência é substituída pela densidade (superficial) de potência, mas o conceito é o mesmo.
Numa cavidade ressonante ideal, toda a energia entregue é devolvida e, assim, os dois campos estão defasados de **± π/2** (ou **90º**).
Estes resultados são conhecidos pelos usuários, mas sem uma análise física do porque deles, como a aqui apresentada.

Algumas relações nas linhas de transmissão

A expressão da impedância Z_2 refletida num extremo de uma linha de transmissão ideal (sem perdas) quando carregada no outro extremo com uma carga Z_1 é:

$$\boxed{Z_2 = Zo.(Z_1 + j.t.Zo)/(Zo + j.t.Z_1) \quad [I]}$$

onde **j = √-1** é a unidade imaginária, **Zo** é a impedância característica da linha[1] e **t = tg(2.π.l/λ)**, com **tg** a função trigonométrica **tangente**, **l** o comprimento físico da linha e **λ** o comprimento de onda no cabo[2].

Primeira propriedade (não comumente apresentada)

Se **l** é igual a um número ímpar de **λ/8**, **t = tg[2.π.(2.n – 1)/8] = ±1** e Z_2 pode-se escrever:

$$\boxed{Z_2 = Zo.(Z_1 \pm j.Zo)/(Zo \pm j.Z_1) \quad [II]}$$

Nota-se que, para Z_1 real e igual a R_1, o módulo de Z_2, $|Z_2|$, é igual a **Zo**, independentemente do valor de R_1:
$$|Z_2| = Zo.\sqrt{(R_1^2 + Zo^2)}/\sqrt{(Zo^2 + R_1^2)}$$

$$\boxed{|Z_2| = Zo \quad [III]}$$

e sua fase, dada por $\varphi = atan[Im(Z_2)/Re(Z_2)]$, é:

$$\boxed{\varphi = \pm\, atan[(Zo^2 - R_1^2)/(2.Zo.R_1)] \quad [IV]}$$

Assim, se $R_1 = 0$, **φ = π/2** para **n = ímpar e φ = - π/2** para **n = par**; se $R_1 \to \infty$, **φ = - π/2** para **n = ímpar** e **φ = π/2** para **n = par** e se $R_1 = Zo$, **φ = 0**[3].

---

1 **Zo é uma quantidade real para linhas sem perda e considerada real para perdas pequenas.**
2 **Isto é, levando-se em conta o fator de velocidade do cabo.**
3 **Z_2 pode ser escrito como $Z_2 = Zo.\, e^{j.\varphi}$.**

Isso mostra que, variando-se a carga $\mathbf{R_1}$ no extremo de tal linha ligada a uma tensão senoidal, a corrente resultante terá módulo constante e fase variável com $\mathbf{R_1}$ desde $\mathbf{-\pi/2}$ até $\mathbf{+\pi/2}$.
Esta propriedade pode ser utilizada em defasadores.

Segunda propriedade (bem conhecida)

Se $\mathbf{l = (2.n - 1).\lambda/4}$, então $\mathbf{t \to \infty}$, o que resulta em $\mathbf{Z_2 = Zo^2/Z_1}$, ou seja, para uma linha de comprimento igual a um número ímpar de quartos de onda, a impedância característica é a média geométrica das impedâncias de carga e refletida ou $\mathbf{Zo = \sqrt{(Z_1.Z_2)}}$. Note-se que esta expressão é simétrica em relação a $\mathbf{Z_1}$ e $\mathbf{Z_2}$ de modo que a impedância de carga pode ser trocada pela refletida. Isto significa que se colocarmos $\mathbf{Z_2}$ como carga, a impedância refletida será $\mathbf{Z_1}$.

Terceira propriedade (bem conhecida)

Se $\mathbf{l = n.\lambda/2}$, então $\mathbf{t = 0}$, o que resulta em $\mathbf{Z_2 = Z_1}$, ou seja, para uma linha com comprimento igual a um número inteiro de semi-comprimentos de onda, a impedância refletida é igual à da carga, independente de **Zo**.
Isto pode ser visto na propriedade anterior, associando-se em série dois pedaços de linha múltiplos ímpares de $\mathbf{\lambda/4}$: $\mathbf{Z_1}$ se transforma em $\mathbf{Z_2}$ pelo primeiro pedaço que se transforma novamente em $\mathbf{Z_1}$ pelo segundo.

Quarta propriedade (não comumente apresentada)

Se uma linha ideal de comprimento **l** e impedância característica **Zo** é carregada com uma carga $\mathbf{Z_1}$, ela refletirá uma impedância $\mathbf{Z_2}$ de acordo com **[I]**. Pergunta-se: se a mesma linha for carregada com $\mathbf{Z_2}$, qual a impedância $\mathbf{Z_3}$ que ela refletirá, ou seja, qual a relação entre $\mathbf{Z_1}$ e $\mathbf{Z_3}$?
Carregando-se a linha com $\mathbf{Z_2}$:

$$\mathbf{Z_3 = Zo.(Z_2 + j.t.Zo)/(Zo + j.t.Z_2) \quad [V]}$$

Tirando-se $\mathbf{Z_1}$ de **[I]**, temos:

$$\mathbf{Z_1 = Zo.(Z_2 - j.t.Zo)/(Zo - j.t.Z_2) \quad [VI]}$$

Aplicando-se **[VI]** em **[V]**, tem-se:

$$\mathbf{Z_3 = Zo.[Z_1.(1 - t^2) + 2.j.t.Zo]/[Zo.(1 - t^2) + 2.j.t.Z_1]}$$

Dividindo-se o denominador e o numerador por $\mathbf{(1 - t^2)}$, temos:

$$\mathbf{Z_3 = Zo.[Z_1 + 2.j.t.Zo/(1 - t^2)]/[Zo + 2.j.t.Z_1/(1 - t^2))]}$$

Observando-se que, se $\mathbf{t = tg(2.\pi.l/\lambda)}$, então $\mathbf{t' = 2.t/(1 - t^2) = tg[(2.\pi.(2.l)/\lambda]}$[4], podemos escrever:

$$\mathbf{Z_3 = Zo.(Z_1 + j.t'.Zo)/(Zo + j.t'.Z_1) \quad [VII]}$$

Dessa forma, $\mathbf{Z_3}$ é relacionado a $\mathbf{Z_1}$ através da relação **[VII]**, ou seja, $\mathbf{Z_3}$ é a impedância refletida numa linha de comprimento **2.l** e carregada com a impedância $\mathbf{Z_1}$.
Isto pode ser verificado sem nenhum cálculo como o efetuado, simplesmente lembrando que $\mathbf{Z_1}$ como carga de uma linha de comprimento **l** reflete $\mathbf{Z_2}$ e esta, como carga de mais um pedaço de linha de comprimento **l**, reflete $\mathbf{Z_3}$. Dessa forma, $\mathbf{Z_3}$ é a impedância refletida num pedaço de linha de comprimento **2.l** quando carregada por uma impedância $\mathbf{Z_1}$.

---

[4] **Pelas propriedades da função tangente.**

Vejamos a coisa graficamente: como na Figura 1, a carga $\mathbf{Z_1}$ refletiu a impedância $\mathbf{Z_2}$ numa linha de comprimento **l**; na Figura 2 a carga $\mathbf{Z_2}$ reflete $\mathbf{Z_3}$ na mesma linha. Usando-se a impedância $\mathbf{Z_2}$ da Figura 1 como carga da Figura 2, obtém-se a Figura 3 e, assim, vale a relação **[VII]**.

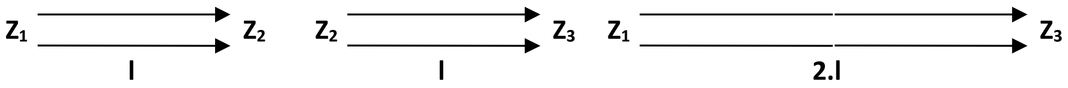

Figura 1 Figura 2 Figura 3

É interessante verificar o caso de $\mathbf{Z_3 = Z_1}$, isto é, quando $\mathbf{Z_1}$ reflete $\mathbf{Z_2}$ e $\mathbf{Z_2}$ também reflete $\mathbf{Z_1}$.
Fazendo $\mathbf{Z_3 = Z_1}$ em **[VII]**, tem-se a igualdade:

$\mathbf{Z_1.Zo + j.t'.Z_1^2 = Zo.Z_1 + j.t'.Zo^2}$ ou

$\mathbf{t'.(Zo^2 - Z_1^2) = 0}$ que resulta em:

ou $\mathbf{Z_1 = Zo}$, quando a linha estaria casada com $\mathbf{Z_1}$ e $\mathbf{Z_1 = Z_2 = Z_3 = Zo}$, ou $\mathbf{t' = 4.\pi.l/\lambda = 0}$, quando então temos $\mathbf{l = n.\lambda/4}$ (**n = inteiro**), ou seja, o comprimento total **2.l** é igual a um número inteiro de $\mathbf{\lambda/2}$, o que já era de se esperar para a impedância refletida ser igual à da carga.

Uma propriedade similar

Suponhamos que temos uma linha de comprimento $\mathbf{l_1}$ e carga $\mathbf{Z_1}$ refletindo uma impedância $\mathbf{Z_2}$. Procuramos pelo comprimento mínimo $\mathbf{l_2}$ que carregado com $\mathbf{Z_2}$ reflete $\mathbf{Z_1}$.
Ao invés de procurarmos diretamente por $\mathbf{l_2}$, procuramos pelo comprimento $\mathbf{l_1 + l_2}$ que transforma $\mathbf{Z_1}$ nele próprio, isto é, o primeiro comprimento $\mathbf{l_1}$ transforma $\mathbf{Z_1}$ em $\mathbf{Z_2}$ que é a carga para o comprimento $\mathbf{l_2}$ que transforma $\mathbf{Z_2}$ de volta em $\mathbf{Z_1}$, como nas Figuras 1', 2' e 3' abaixo.

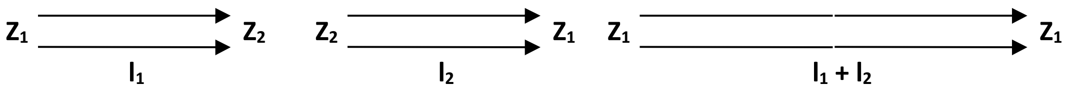

Figura 1' Figura 2' Figura 3'

Lembrando que o mínimo comprimento de cabo que transforma $\mathbf{Z_1}$ nele próprio (com qualquer impedância característica) é $\mathbf{\lambda/2}$, então $\mathbf{l_1 + l_2 = \lambda/2}$. Assim, o comprimento de cabo que transforma $\mathbf{Z_2}$ de volta em $\mathbf{Z_1}$ é justamente $\mathbf{l_2 = \lambda/2 - l_1}$.

Quinta propriedade

Uma linha de transmissão ideal, quando carregada com uma carga puramente reativa, reflete no outro extremo uma carga também reativa. O sinal desta reatância refletida depende de **Zo** e também do comprimento da linha. De fato, usando-se a relação **[I]** e pondo-se a carga $\mathbf{Z_1}$ como sendo uma reatância **j.X** (**X > 0** para o caso indutivo e **X < 0** para o caso capacitivo), tem-se:

$\mathbf{Z_2 = Zo.(j.X + j.t.Zo)/(Zo + j.j.t.X)}$

ou

$\mathbf{Z_2 = j.Zo.(X + t.Zo)/(Zo - t.X)}$ **[VIII]**

Como todos os parâmetros na relação acima são reais, $\mathbf{Z_2}$ é uma reatância pura.
Mas qual a condição para que $\mathbf{Z_2}$ seja indutiva ou positiva? É necessário que **(X + t.Zo)/(Zo – t.X)** seja positiva, ou seja, **(X + t.Zo)** e **(Zo – t.X)** têm de ter o mesmo sinal, ou ambos positivos, ou ambos negativos.
No caso de ambos positivos:

$(X + t.Zo) > 0$
$(Zo – t.X) > 0$

O que resulta em **$–X/Zo < t < Zo/X$**, que vale para qualquer valor de **$X > 0$**, mas não vale para **$X < 0$**.
Como **$t = tg(2.\pi.l/\lambda)$**, tem-se:

$[\lambda/(2.\pi)].atan(-X/Zo) < l < [\lambda/(2.\pi)].atan(Zo/X)$ [IX]

Para ambos negativos:

$(X + t.Zo) < 0$
$(Zo – t.X) < 0$

O que resulta em **$Zo/X < t < –X/Zo$**, que vale para qualquer valor de **$X < 0$**, mas não vale para **$X > 0$**.

$[\lambda/(2.\pi)].atan(Zo/X) < l < [\lambda/(2.\pi)].atan(–X/Zo)$ [X]

Assim, para que a impedância refletida **Z_2** seja indutiva (> 0), para cargas **Z_1** indutivas (> 0), o comprimento **l** da linha tem de satisfazer à relação **[IX]** e, para cargas **Z_1** capacitivas (< 0), a relação **[X]**.
Para que **Z_2** seja capacitiva (< 0), **$(X + t.Zo)$** e **$(Zo – t.X)$** têm de ter sinal oposto. O primeiro caso é:

$(X + t.Zo) > 0$
$(Zo – t.X) < 0$

O que resulta em **$–X/Zo < t$** e **$t > Zo/X$**, que, para qualquer valor de **$X > 0$**, vale **$t > Zo/X$**. Para qualquer valor de **$X < 0$**, vale **$t > –X/Zo$**.

$l > [\lambda/(2.\pi)].atan(Zo/X)$ [XI], para **X** indutivo (> 0) e

$l > [\lambda/(2.\pi)].atan(–X/Zo)$ [XII], para **X** capacitivo (< 0)

No segundo caso:

$(X + t.Zo) < 0$
$(Zo – t.X) > 0$

O que resulta em **$–X/Zo > t$** e **$t < Zo/X$**, que, para qualquer valor de **$X > 0$**, vale **$t < –X/Zo$** Para qualquer valor de **$X < 0$**, vale **$t < Zo/X$**.

$l > [\lambda/(2.\pi)].atan(–X/Zo)$ [XIII], para **X** indutivo (> 0) e

$l > [\lambda/(2.\pi)].atan(Zo/X)$ [XIV], para **X** capacitivo (< 0)

Assim, para que a impedância refletida **Z_2** seja capacitiva (< 0), para cargas **Z_1** indutivas (> 0), o comprimento **l** da linha tem de satisfazer à relação **[XIII]** e, para cargas **Z_1** capacitivas (< 0), a relação **[XIV]**.

Um caso curioso

Seja um ‘loop’ de comprimento **l** feito com uma linha de transmissão ideal de impedância característica **Zo**, como na Figura 4. Pergunta-se pela impedância **Z_A** vista no ponto **A** da linha[5].
Pode-se redesenhar o ‘loop’ como na Figura 5, onde as duas metades[6] do mesmo aparecem conectadas em paralelo e carregadas com uma impedância **R** infinita. Assim, na Figura 5 à direita os dois condutores da linha estão isolados sem nenhuma conexão entre si. A Figura 6 mostra os detalhes.

---

[5]**O ponto A pode ser qualquer pela simetria da linha**

Como as duas metades da linha estão em paralelo, são equivalentes a uma linha de mesmo comprimento elétrico e de impedância **Zo/2**[7]. Portanto, a impedância $\mathbf{Z_A}$ **r**efletida em **A** pode ser escrita usando-se a expressão **[I]** com a substituição de **Zo** por **Zo/**2, $\mathbf{Z_1}$ por **R** (que tenderá ao ∞) e **t** será igual a **tg(π.l/λ)**, já que **l** agora é substituído por **l/2**. Assim, para um valor qualquer de **R**:

$$Z_A = (Zo/2).(R + j.t.Zo/2)/(Zo/2 + j.t.R) \quad [XV]$$

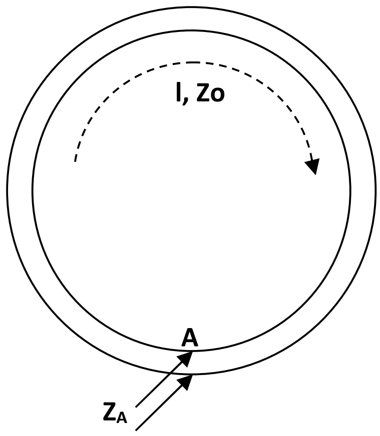

Figura 4

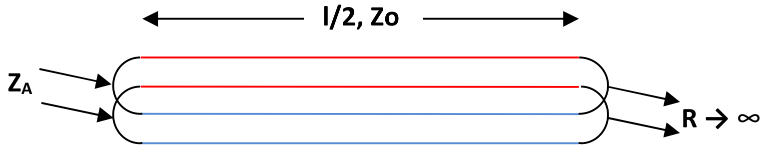

Figura 5

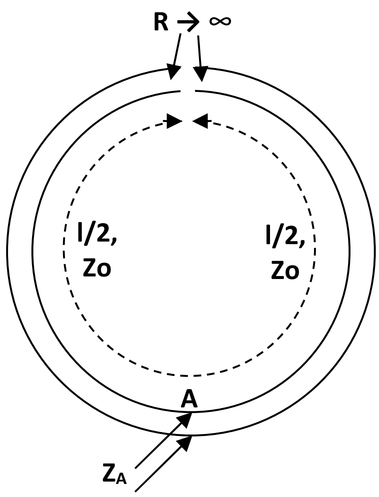

Figura 6

[6]**Escolhe-se o ponto metade porque nele as duas partes têm os sinais com a mesma amplitude e fase e, assim, podem ser conectadas e desconectadas sem afetar nada no circuito.**
[7]**Vide referência 1.**

Fazendo-se o limite quando **R** → ∞, tem-se:

$$Z_A = -j.Zo/[2.tg(\pi.l/\lambda)] \quad [XVI]$$

Vejamos alguns casos especiais.
Se o comprimento total do 'loop' **l = n.λ** (com **n = inteiro**), Z_A → ∞ como se deveria esperar, pois o comprimento que vai de **A** até a carga em aberto é **n.λ/2** (vide 3ª propriedade).
Se **l = (2.n – 1).λ/2**, **Z_A = 0**, pois **A** vê uma linha de **(2.n – 1).λ/4** carregada em aberto (vide 2ª propriedade).
Se **l = (2.n – 1).λ/4**, **Z_A = ± j.Zo/2** e **|Z_A| = Zo/2**, pois **A** vê uma linha de comprimento **(2.n – 1).λ/8** carregada em aberto (vide 1ª propriedade).
Podemos verificar ainda que, para **l** pequeno em relação a **λ**, a impedância é capacitiva. Poder-se-ia pensar que o 'loop' resultaria numa impedância indutiva[8].

Outro caso semelhante

Constrói-se um 'loop' semelhante ao anterior porém com uma 'troca dos fios' num ponto qualquer do mesmo, como na Figura 7. Pergunta-se pela impedância **Z_A.**
A troca dos fios no extremo de um pedaço de linha, corresponde a colocação de um comprimento extra de **λ/2**, já que este proporciona uma inversão de fase como a obtida com a troca dos fios. A nova linha terá comprimento **l + λ/2** e nenhuma troca de fios, recaindo no caso anterior.
Dessa maneira construiu-se uma linha como a da Figura 4, substituindo-se o seu comprimento total **l** por **l + λ/2**. Na expressão **[XVI]**, fazendo-se esta substituição, obtém-se:

$$Z_A = -j.Zo/[2.tg(\pi.l/\lambda + \pi/2)] \quad [XVII]$$

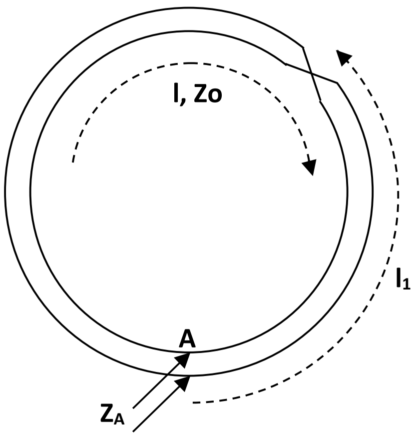

Figura 7

Como somar-se **π/2** ao argumento de uma função tangente corresponde a transformá-la em cotangente ou inverso da tangente original, tem-se:

$$Z_A = -j.Zo.tg(\pi.l/\lambda)/2 \quad [XVIII]$$

---

8 **Isto seria verdade no caso de um 'loop' com um só fio aberto no ponto A, mas não com uma linha de transmissão.**

É interessante notar que após se inserir o pedaço de **λ/2**, a linha fica sem cruzamento, isto é, perde-se a referência de onde ele estava inicialmente. Isto mostra que esta posição inicial pode ser qualquer, levando sempre ao mesmo resultado **[XVIII]**.
Vejamos alguns casos especiais.

Se $\mathbf{l = n.\lambda}$ (com **n = inteiro**), $\mathbf{Z_A = 0}$
Se $\mathbf{l = (2.n - 1).\lambda/2}$, $Z_A \rightarrow \infty$
Se $\mathbf{l = (2.n - 1).\lambda/4}$, $\mathbf{Z_A = \pm\, j.Zo/2}$ e $\mathbf{|Z_A| = Zo/2}$
Uma informação a mais

O módulo do coeficiente de reflexão no extremo da carga **Z** de uma linha de transmissão ideal **Zo** é dado por:

$$|\rho| = |Zo - Z|/|Zo + Z| \quad [XIX]$$

Com **Z = R + j.X** e **Zo** uma quantidade real.
Pela definição da Relação de Ondas Estacionárias (ROE) **r**:

$$r = (1 + |\rho|)/(1 - |\rho|) \quad [XX]$$

Substituindo-se **[XX]** em **[XIX]**, tem-se:

$$r = (|Zo + Z| + |Zo - Z|)/(|Zo + Z| - |Zo - Z|) \text{ ou}$$

$$r = \{\sqrt{[(Zo + R)^2 + X^2]} + (\sqrt{[(Zo - R)^2 + X^2]}\}/\{\sqrt{[(Zo + R)^2 + X^2]} - (\sqrt{[(Zo - R)^2 + X^2]}\}$$

Desejamos saber qual o menor valor de **r** ao variarmos **X**. Isto é importante quando estamos próximos da ressonância de uma antena com dada ROE e variamos a frequência ou o comprimento da antena. Assim, a menor ROE será obtida pela anulação da derivada desta em relação a **X** quando **R** se mantém constante:
dr/dX = 0, o que resulta em **X = 0**, ou seja, na ressonância, a ROE é mínima para quaisquer valores fixos de **Zo** e de **R**. Para **X = 0**, os valores possíveis da ROE são **r = Zo/R** ou **r = R/Zo**, algo já bem conhecido.

Referências

1 - *AntenneX* Issue No. 121 – May 2007 – Note 2
2 - ARRL Antenna Book, 2007