

LINHAS DE TRANSMISSÃO EM PARALELO

Por Luiz Amaral
PYILL/AC2BR

Este artigo mostra o resultado quando se põe em paralelo duas linhas de transmissão com qualquer impedância característica e com qualquer tipo de carga, mas com o mesmo comprimento elétrico, isto é, comprimentos levando-se em conta os fatores de velocidade das linhas.

Um gerador é conectado a duas linhas de transmissão com o mesmo comprimento elétrico em paralelo, isto é, carregados com uma impedância comum Z_c , como na Figura 1.

As impedâncias características das linhas são Z_{o1} e Z_{o2} . O gerador 'vê' uma impedância refletida Z_r .

Sobre a carga, a tensão é V_c .

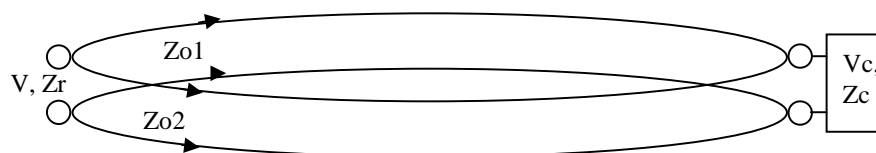


Figura 1

Para analisar o que ocorre, separa-se o sistema em duas cargas Z_{c1} e Z_{c2} , uma para cada linha, tal que esta configuração resulte na mesma impedância Z_r para o gerador.

Também se deseja que, com as linhas postas em paralelo, obtenha-se o circuito da Figura 1. Em outras palavras, cria-se um novo circuito de tal modo que não importe se as cargas Z_{c1} e Z_{c2} estão postas em paralelo ou não, sob o ponto de vista do gerador. O sistema com cargas separadas é mostrado na Figura 2.

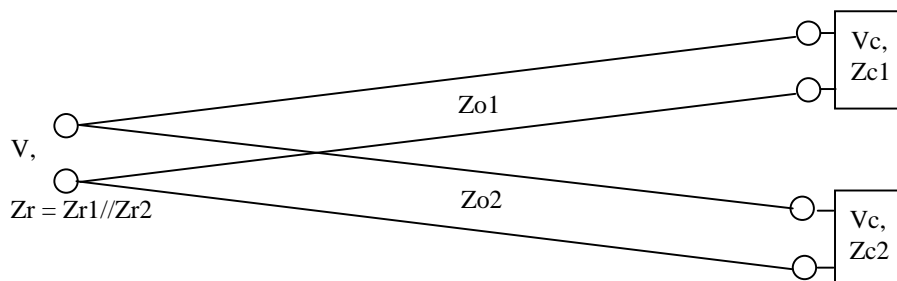


Figura 2

Neste esquema, a carga Z_{c1} reflete Z_{r1} para o gerador através da linha com impedância Z_{o1} e Z_{c2} reflete Z_{r2} para o gerador através da linha com impedância Z_{o2} . Z_{r1} em paralelo com Z_{r2} é igual à impedância refletida original Z_r .

Como se quer que o paralelo de Z_{c1} e Z_{c2} seja igual à carga original Z_c , as fases de Z_{c1} e Z_{c2} devem ser iguais, ou seja, ambas devem ter a mesma razão reatância/resistência.

Além disso, como está explícito na Figura 2, necessita-se que as voltagens nas cargas sejam iguais em amplitude e fase, como é a voltagem original na carga Z_c . Isto garante que as duas cargas Z_{c1} e Z_{c2} podem ser postas em paralelo sem afetar o gerador.

Assim, pode-se escrever:

$$Z_c = Z_{c1} \cdot Z_{c2} / (Z_{c1} + Z_{c2}) \quad [1]$$

Se as voltagens nas cargas são iguais, essas cargas são proporcionais às correspondentes impedâncias características. Assim:

$$Z_{c1} / Z_{o1} = Z_{c2} / Z_{o2} \text{ ou } Z_{c2} = Z_{o2} \cdot Z_{o1} / Z_{c1} \quad [2]$$

Mas $Z_c = Z_{c1} // Z_{c2}$:

$$Z_c = Z_{c1} \cdot Z_{c2} / (Z_{c1} + Z_{c2}) \quad [3]$$

Aplicando-se [2] em [3], obtem-se:

$$Z_c = Z_{c1} \cdot Z_{o2} / (Z_{o2} + Z_{o1}) \quad [4]$$

$$\text{ou } Z_{c1} = Z_c \cdot (Z_{o2} + Z_{o1}) / Z_{o2} \quad [5]$$

o mesmo para Z_{c2} :

$$Z_{c2} = Z_c \cdot (Z_{o2} + Z_{o1}) / Z_{o1} \quad [6]$$

Para linhas ideais, a impedância refletida z_r , para dada impedância característica z_o e carga z_c , é dada por:

$$z_r = z_o \cdot (z_c + z_o \cdot t) / (z_o + z_c \cdot t), \text{ onde } t = j \cdot \text{tg } \beta \cdot L$$

Aqui j é a unidade imaginária e $\beta = 2 \cdot \pi / \lambda$, com λ sendo o comprimento de onda na linha, isto é, levando-se em conta o fator de velocidade da linha.

Aplicando-se a última expressão para as linhas 1 e 2, tem-se:

$$Z_{r1} = Z_{o1} \cdot (Z_{c1} + Z_{o1} \cdot t) / (Z_{o1} + Z_{c1} \cdot t) \quad [7]$$

$$Z_{r2} = Z_{o2} \cdot (Z_{c2} + Z_{o2} \cdot t) / (Z_{o2} + Z_{c2} \cdot t) \quad [8]$$

Substituindo em [7] e [8] Z_{c1} e Z_{c2} por seus valores de [5] e [6], tem-se:

$$\mathbf{Z1r} = \mathbf{Zo1} \cdot [\mathbf{Zc} + \mathbf{t} \cdot \mathbf{Z1o} \cdot \mathbf{Z2o} / (\mathbf{Z1o} + \mathbf{Z2o})] / [\mathbf{Z1o} \cdot \mathbf{Z2o} / (\mathbf{Z1o} + \mathbf{Z2o}) + \mathbf{Zc} \cdot \mathbf{t}] \quad [9]$$

$$\mathbf{Z2r} = \mathbf{Zo2} \cdot [\mathbf{Zc} + \mathbf{t} \cdot \mathbf{Z1o} \cdot \mathbf{Z2o} / (\mathbf{Z1o} + \mathbf{Z2o})] / [\mathbf{Z1o} \cdot \mathbf{Z2o} / (\mathbf{Z1o} + \mathbf{Z2o}) + \mathbf{Zc} \cdot \mathbf{t}] \quad [10]$$

Escrevendo-se:

$$\mathbf{P} = [\mathbf{Zc} + \mathbf{t} \cdot \mathbf{Z1o} \cdot \mathbf{Z2o} / (\mathbf{Z1o} + \mathbf{Z2o})] / [\mathbf{Z1o} \cdot \mathbf{Z2o} / (\mathbf{Z1o} + \mathbf{Z2o}) + \mathbf{Zc} \cdot \mathbf{t}] \quad [11]$$

Então:

$$\mathbf{Z1r} = \mathbf{Zo1} \cdot \mathbf{P} \quad [12]$$

$$\mathbf{Z2r} = \mathbf{Zo2} \cdot \mathbf{P} \quad [13]$$

Como se deseja que $\mathbf{Z1r}$ em paralelo com $\mathbf{Z2r}$ resulte em \mathbf{Zr} , tem-se:

$$\mathbf{Zr} = \mathbf{Z1r} \cdot \mathbf{Z2r} / (\mathbf{Z1r} + \mathbf{Z2r}) \quad [14]$$

Pondo [12] e [13] em [14], obtém-se:

$$\mathbf{Zr} = \mathbf{Zo1} \cdot \mathbf{Zo2} \cdot \mathbf{P} / (\mathbf{Zo1} + \mathbf{Zo2}) \quad [15]$$

Agora quer-se saber qual a impedância característica da linha que, sozinha, substitui o par em paralelo, resultando na mesma impedância \mathbf{Zr} com a carga \mathbf{Zc} . Usando-se a expressão geral para a impedância refletida, tem-se:

$$\mathbf{Zr} = \mathbf{Zo} \cdot (\mathbf{Zc} + \mathbf{Zo} \cdot \mathbf{t}) / (\mathbf{Zo} + \mathbf{Zc} \cdot \mathbf{t}) \quad [16]$$

Substituindo-se \mathbf{P} em [15] por sua definição em [11], obtém-se:

$$\mathbf{Zr} = [\mathbf{Z1o} \cdot \mathbf{Z2o} / (\mathbf{Z1o} + \mathbf{Z2o})] \cdot \{\mathbf{Zc} + [\mathbf{Z1o} \cdot \mathbf{Z2o} / (\mathbf{Z1o} + \mathbf{Z2o})] \cdot \mathbf{t}\} / \{[\mathbf{Z1o} \cdot \mathbf{Z2o} / (\mathbf{Z1o} + \mathbf{Z2o})] + \mathbf{Zc} \cdot \mathbf{t}\} \quad [17]$$

A expressão [15] corresponde a uma única linha e [17] ao caso das linhas em paralelo. Comparando-se ambas, tem-se:

$$\mathbf{Zo} = \mathbf{Zo1} \cdot \mathbf{Zo2} / (\mathbf{Zo1} + \mathbf{Zo2}) \quad [18]$$

$\mathbf{N[18]}$ mostra que a impedância característica \mathbf{Zo} da linha que substitui o par de linhas é justamente o paralelo das impedâncias $\mathbf{Zo1}$ e $\mathbf{Zo2}$.

Podemos dizer finalmente:

“Se um gerador é conectado a uma carga através de um par de linhas de transmissão ideais em paralelo com impedâncias características $\mathbf{Zo1}$ e $\mathbf{Zo2}$, ambas com o mesmo comprimento elétrico, a linha única com o mesmo comprimento elétrico que substitui este sistema tem sua impedância característica igual ao paralelo de $\mathbf{Zo1}$ e $\mathbf{Zo2}$ ”.

Example:

Deseja-se um pedaço de cabo que transforme a impedância de 25Ω de uma antena em 50Ω para se usar qualquer comprimento de cabo de 50Ω ao transmissor.

Uma linha de $\frac{1}{4}$ de onda faria o trabalho e sua impedância característica seria dada por:

$$Z_0^2 = 25 \cdot 50, \text{ ou seja, } Z_0 \approx 36\Omega.$$

Mas este cabo não existe comercialmente, mas dois pedaços de cabo de 73Ω em paralelo resultariam em um cabo simulado com 36Ω e resolveria o problema.

Neste exemplo tem-se perfeito casamento e a carga é pura resistiva, isto é, real. No caso geral estudado isto não é necessário, podendo a carga e o comprimento elétrico serem quaisquer.