Die Substitutionsmethode

Um die Substitutionsmethode (Ersetzungsmethode) verstehen zu können, ist es nötig, sich mit der Bedeutung des Differentials vertraut zu machen, das man hinter die Integrandenfunktion schreibt, z.B.: dx. Man leitet den Integralbegriff in der Schule gewöhnlich über die Annäherung des Flächeninhalts zwischen einer Kurve (als dem Graph einer Funktion) und der x-Achse her. Hierzu nimmt man gleichbreite Rechtecke, deren linke [oder rechte] obere Ecken auf dem Graph liegen und deren Bases auf der x-Achse liegen. Die Breite jedes dieser n Rechtecks ist dann der n-te Teil der Breite des gefragten Bereichs $[x_0 ; x_1]$, den man allgemein Δx nennen kann, denn er ist ja konstant $(x_1 - x_0)/n$. Die Höhe wird jeweils bestimmt vom Funktionswert an der jeweiligen Stelle. Man hat also eine Summe

$$\sum_{x=x_0}^{x_1} f(x) \cdot \Delta x$$

Nun läßt man n gegen unendlich laufen bzw. die Breite der Rechtecke (Δx) gegen Null. Man hat dadurch quasi unendlich viele Rechtecke, unendlich viele Summanden in der Summe. Prinzipiell ändern sich nur die Symbole:

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)\, dx$$

Aus dem Summen- wird das Integralzeichen, aus dem Δx durch den Grenzübergang das dx. Man hat sich das Differential dx als unendlich kleinen Abschnitt auf der x-Achse vorzustellen, der keine Größe mehr hat, aber die „Information“, die „Seele“ der x-Werte noch in sich trägt. Übrigens handelt es sich bei dx wirklich noch um einen Faktor; es ist also nötig, die Integrandenfunktion einzuklammern, wenn sie eine Summe oder Differenz ist.
Genauso verhält es sich mit dem Differential der y-Werte, dy. Nur daß y meist als Funktionswert von x auftritt. Es sind also unendlich kleine Höhenveränderungen der Funktion, die keine wirkliche Größe mehr haben, aber noch das geistige Wesen der Funktion in sich tragen.
Dies sorgt dafür, daß der Ausdruck

$$\frac{dy}{dx}$$

tatsächlich, anstelle des Differenzenquotienten $\Delta y/\Delta x$, der nur bei Geraden genau funktioniert, die Steigung einer Kurve in jedem Punkt angibt, an der die Grenzwerte der x- und Funktionswerte existieren.
Die Steigungsfunktion f'(x), die für jede Stelle x die Steigung der Funktion f(x) angibt, kann daher auch so geschrieben werden:

$$f'(x) = \frac{d\,f(x)}{dx}$$

oder kurz $f'(x) = \frac{dy}{dx}$, wenn klar ist, daß $y=f(x)$ ist.

Überlegen wir nun, was passiert, wenn wir in der Funktion $y=f(x)=\ln(x)$ das x durch z^2+3 ersetzen. Wir erhalten rechts $\ln(z^2+3)$. Links erhalten wir $f(z^2+3)$, was unpraktisch ist, denn schließlich brauchen wir meist Funktionswerte an bestimmten festen Stellen. Lassen wir das f(...) einmal beiseite und befassen uns nur mit dem y, das sich jetzt als (neudefinierte) Funktion von z darstellt: $y = \ln(z^2+3)$. Man kann das mit der Kettenregel locker nach z ableiten, wie man auch die ursprüngliche Funktion (also das ursprünglich als Funktion von x definierte y) nach x ableiten konnte. Mit der Schreibweise der Differentialquotienten erhält man

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} \quad \text{und} \quad \frac{dy}{dz} = 2z\,\frac{1}{z^2+3} = \frac{2z}{z^2+3}$$

Wir wissen, daß $x=z^2+3$ ist, können also auch diesen Ausdruck nach z ableiten („differenzieren“):

$$\frac{dx}{dz} = \frac{d(z^2+3)}{dz} = 2z$$

Löst man $x=z^2+3$ nach z auf, bekommt man $z=\sqrt{x-3}$ und kann das nach x ableiten:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x+3}}$$

Den Spielereien sind (fast) keine Grenzen gesetzt. Wozu das alles? Nun, man erhält offensichtlich jeweils eine Gleichung, die Zusammenhänge zwischen zwei Differentialen und einer Variablen herstellt. Im letzten Beispiel sind das die Differentiale dz und dx sowie die Variable x. Im vorletzten Beispiel sind es (wohlgemerkt) die selben Differentiale, aber die Variable z.
Diese Zusammenhänge werden wir gleich dringend benötigen.

Gesucht sei nun die Stammfunktion von $f(x) = 2x\,e^{x^2+3}$, also $\int 2x\,e^{x^2+3}dx$.
Mit der Methode der partiellen Integration kommt man hier nicht weit, weil man für den Faktor e^{x^2+3} keine Stammfunktion angeben kann. (Es gibt sie übrigens gar nicht!)
Es wäre alles einfacher, wenn wir statt dem Exponenten x^2+3 einen einfacheren Exponenten hätten, am besten nur x.
Hier probieren wir es jetzt eben mit der Substitution. Wir ersetzen das unangenehme x^2+3 durch z:

$$\int x\,e^{x^2+3}dx = \int x\,e^z dx$$

Vorsicht: z ist keine Konstante, sondern ja von x abhängig. Wir haben zwei variable Buchstaben im Salat, und das geht nicht. Alle x müssen weg. Nun können wir auch das x ersetzen, indem wir $z=x^2+3$ nach x auflösen und den so gewonnenen Ausdruck einsetzen:

$$x = \sqrt{z-3}$$

$$\int x\,e^z dx = \int \sqrt{z-3}\,e^z\,dx$$

Schön. Schön? Eigentlich nicht, denn die Wurzel könnte noch Kopfzerbrechen bereiten, aber man wird sehen. Noch haben wir nämlich nicht alle x ersetzt. Das dx nämlich bedeutete, daß x die Integrationsvariable ist, und das ist hier natürlich unsinnig, weil unsere Variable inzwischen z heißt. Wir benötigen anstelle von dx ein dz.
Hier hilft das oben erwähnte Spiel mit den Differentialquotienten. Wir schaffen uns einen Zusammenhang zwischen dx und dz, und zwar so, daß in dieser Gleichung sonst nur z auftritt, denn das x wollen wir ja loswerden. Wir müssen also entweder $z = x^2+3$ nach x ableiten oder $x = \sqrt{z-3}$ nach z. Im ersten Falle hätten wir wieder x dabei; wir müssen also den zweiten Fall wählen:

$$\frac{dx}{dz} = \frac{1}{2\sqrt{z-3}}$$

Damit erhalten wir (nach Multiplikation mit dz)

$$dx = \frac{1}{2\sqrt{z-3}}dz$$

und können unser dx im Integralausdruck ersetzen.

$$\int \sqrt{z-3}\,e^z\,dx = \int \sqrt{z-3}\cdot e^z \cdot \frac{1}{2\sqrt{z-3}}\,dz = \int \frac{1}{2}\,e^z\,dz$$

Das sieht schon besser aus, wir integrieren locker:

$$\int \frac{1}{2}e^z dz = \frac{1}{2}\int e^z dz = \frac{1}{2}e^z$$

Nun müssen wir rücksubstituieren, d.h. am Schluß wieder aus dem z ein x machen. Dazu ersetzen wir „alle“ z durch x^2+3, denn das war unsere Substitution. Insgesamt erhalten wir damit:

$$\int x\,e^{x^2+3}\,dx = \int \frac{1}{2}\,e^z dz = \frac{1}{2}e^z = \frac{1}{2}e^{x^2+3}$$

Beispiele:

1.) $\int \cos(4x)\,dx$

Substitution: $z = 4x \qquad x = \frac{1}{4}z \qquad \frac{dx}{dz} = \frac{1}{4} \qquad dx = \frac{1}{4}dz$

$$\int \cos(4x)\,dx = \int \frac{\cos z}{4}\,dz = \frac{1}{4}\int \cos z\,dz = \frac{\sin z}{4} = \frac{\sin(4x)}{4}$$

2.) $\int \frac{x^3}{(x^2-1)^3}\,dx$

Substitution: $z = x^2 - 1 \qquad x = \sqrt{z+1} \qquad \frac{dx}{dz} = \frac{1}{2\sqrt{z+1}} \qquad dx = \frac{1}{2\sqrt{z+1}}dz$

$$\int \frac{x^3}{(x^2-1)^3}\,dx = \int \frac{\left(\sqrt{z+1}\right)^3}{z^3}\cdot\frac{1}{2\sqrt{z+1}}\,dz = \int \frac{\left(\sqrt{z+1}\right)^2}{2z^3}\,dz = \int \frac{z+1}{2z^3}\,dz = \int\left(\frac{1}{2z^2}+\frac{1}{2z^3}\right)dz$$

$$= -\frac{1}{2z} - \frac{1}{4z^2} = \frac{-2z-1}{4z^2} = \frac{-2(x^2-1)-1}{4(x^2-1)^2} = \frac{1-2x^2}{4(x^2-1)^2}$$

3.) $\int \frac{\sqrt{\frac{1}{x}+1}}{x^2}\,dx$

Substitution: $z = \frac{1}{x}+1 \qquad x = \frac{1}{z-1} \qquad \frac{dx}{dz} = \frac{-1}{(z-1)^2}$

$$\int \frac{\sqrt{\frac{1}{x}+1}}{x^2}\,dx = \int \frac{-\sqrt{z}}{x^2(z-1)^2}\,dz = \int \frac{-\sqrt{z}}{\frac{1}{(z-1)^2}(z-1)^2}\,dz = \int -\sqrt{z}\,dz = -\frac{2}{3}\sqrt{z^3} = -\frac{2}{3}\sqrt{\left(\frac{1}{x}+1\right)^3}$$

4.) $\int \tan(x)\,dx$

Substitution: $z = \cos x \qquad \frac{dz}{dx} = -\sin x \qquad dx = -\frac{1}{\sin x}dz$

$$\int \tan(x)\,dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx = \int \frac{\sin x}{z}\cdot\left(-\frac{1}{\sin x}\right)dz = -\int \frac{1}{z}\,dz = -\ln(z) = -\ln(\cos(x))$$

Am letzten Beispiel ist zweierlei neu: Zum einen wird ein Term „substituiert“, der so überhaupt nicht im Integranden vorkommt. Zum andern wird der Substitutionsterm direkt nach der zu ersetzenden Variable x differenziert. Durch wunderbare Umstände fällt dann einerseits x im Integranden weg, andererseits erhält man einen verblüffend einfachen Term, der sich problemlos weiterverarbeiten läßt.

Dies führt uns noch zu einer dritten Art der Substitution: Man ersetzt nicht einen Teilterm des Integranden durch eine neue Variable, sondern die alte Variable selbst durch einen neuen Term mit der neuen Variablen.

Beispiel: Für $|x|<1$ sei dieses Integral zu lösen: $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$. Die Substitution $z=1-x^2$ führt genausowenig zu einfacheren Integranden wie die Substitution der gesamten Wurzel (ausprobieren!). Seltsamerweise führt aber $x=\sin(z)$ zu einem sehr brauchbaren Term, denn man kann den sogenannten trigonometrischen Pythagoras ($\sin^2 x + \cos^2 x = 1$) ausnutzen:

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

Substitution: $x = \sin(z)$ $\quad dx/dz = \cos(z)$ $\quad dx = \cos(z)\,dz$ $\quad z = \operatorname{asin}(z)$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(z)}}\cos(z)\,dz = \int \frac{\cos(z)}{\cos(z)}\,dz = \int 1\,dz = z = \operatorname{asin}(x)$$

Die Substitution $x = \cos(z)$ mit $dx/dz = -\sin(z)$ führt übrigens auf einen interessanten Zusammenhang:

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{1-\cos^2(z)}}\cos(z)\,dz = \int \frac{-\sin(z)}{\sin(z)}\,dz = -\int 1\,dz = -z = -\operatorname{acos}(x)$$

Man könnte folgern, daß $\operatorname{asin}(x) = -\operatorname{acos}(x)$ gilt. Dies ist aber nicht zutreffend, da wir die Integrationskonstanten unterschlagen haben. Es ging uns ja nur um eine beliebige Stammfunktion.
Vielmehr gilt $\operatorname{asin}(x) = -\operatorname{acos}(x) + \pi/2$.

Beispiele für Substitution der Variable durch einen neuen Term:

1.) $\int a^x e^x\,dx$

Substitution: $x = \ln z$ $\quad dx/dz = 1/x$ $\quad dx = 1/x\,dz$

$$\int a^x e^x\,dx = \int \frac{a^{\ln z} e^{\ln z}}{z}\,dz = \int \frac{z^{\ln a}\cdot z}{z}\,dz = \int z^{\ln a}\,dz = \frac{1}{\ln a + 1}\,z^{\ln a + 1}$$

Die Vereinfachung $a^{\ln z}=z^{\ln a}$ folgt aus $a=e^{\ln a}$, denn so wird $a^{\ln z}$ zu $(e^{\ln a})^{\ln z} = e^{\ln a \ln z} = e^{\ln z \ln a} = z^{\ln a}$.
Die Resubstitution ergibt dann:

$$\frac{z^{\ln a+1}}{\ln a+1} = \frac{\left(e^x\right)^{\ln a+1}}{\ln a+1} = \frac{e^{x(\ln a+1)}}{\ln a+1} = \frac{e^{x\ln a+x}}{\ln a+1} = \frac{e^{x\ln a}e^x}{\ln a+1} = \frac{a^x e^x}{\ln a+1}$$

2.) $\int \frac{x}{\sqrt{1-x}}\,dx$

Substitution: $x = 1 - z^2$ $\quad dx/dz = -2z$ $\quad dx = -2z\,dz$

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-x}}\,dx = \int \frac{1-z^2}{\sqrt{1-(1-z^2)}}(-2z)\,dz = \int \frac{2z^3-2z}{\sqrt{z^2}}\,dz = 2\int \frac{z^3-z}{z}\,dz = 2\int (z^2-1)\,dz$$

Dies läßt sich problemlos integrieren:

$$2\int (z^2-1)\,dz = 2\left(\frac{1}{3}z^3 - z\right) = \frac{2}{3}z(z^2-3)$$

Nun muß noch resubstituiert werden ($z = \sqrt{1-x}$), und man erhält insgesamt:

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-x}}\,dx = 2\int (z^2-1)\,dz = \frac{2}{3}z(z^2-3) = \frac{2}{3}\sqrt{1-x}\,(1-x-3) = -\frac{2(x+2)\sqrt{1-x}}{3}$$

3.) $\int \frac{1}{x\ln x}\,dx$

Substitution: $x = e^z$ $\quad dx/dz = e^z$ $\quad z = \ln x$

$$\int \frac{1}{x\ln x}\,dx = \int \frac{2}{e^z\cdot z}\cdot e^z dz = \int \frac{1}{z}\,dz = \ln z = \ln(\ln(x))$$

4.) $\int e^{e^x+x}dx$

Substitution: $x = \ln z \qquad dx/dz = 1/z \qquad z = e^x$

$$\int e^{e^x+x}\,dx = \int \frac{e^{e^{\ln z}+\ln z}}{z}dz = \int \frac{e^{z+\ln z}}{z}dz = \int \frac{e^z\, e^{\ln z}}{z}dz = \int \frac{e^z\, z}{z}dz = \int e^z dz = e^z = e^{e^x}$$

5.) $\int \sin(\sqrt{x-1}\,)\,dx$

Substitution: $x = z^2 + 1 \qquad dx/dz = 2z \qquad z = \sqrt{x-1}$

$$\int \sin(\sqrt{x-1}\,)\,dx = \int \sin(\sqrt{z^2}\,)\cdot 2z\;dz = \int 2z\sin(z)\,dz$$

$$= -2z\cos(z) + 2\int \cos(z)\,dz = -2z\cos(z) + 2\sin(z) = 2\sin(\sqrt{x-1}\,) - 2\sqrt{x-1}\,\cos(\sqrt{x-1}\,)$$

6.) $\int \frac{ax}{bx+c}dx$

Substitution $x = \frac{z-c}{b} \qquad dx/dz = 1/b \qquad z = bx + c$

$$\int \frac{ax}{bx+c}dx = \int \frac{a\frac{z-c}{b}}{b\frac{z-c}{b}+c}\cdot\frac{1}{b}dz = \int \frac{az-ac}{b^2 z}dz = \frac{a}{b^2}\int\left(1-\frac{c}{z}\right)dz$$

$$= \frac{a}{b^2}\left(z - c\ln(z)\right) = \frac{a}{b^2}(bx+c) - \frac{ac}{b^2}\ln(bx+c) = \frac{a}{b}x + \frac{ac}{b^2} - \frac{ac}{b^2}\ln(bx+c)$$

Da der mittlere Summand konstant ist, ist auch dies eine Stammfunktion:

$$\int \frac{ax}{bx+c}dx = \frac{a}{b}x - \frac{ac}{b^2}\ln(bx+c)$$

7.) $\int \frac{\sqrt{x+b^2}}{x}dx$

Substitution $x = z^2 + 2bz \qquad dx/dz = 2z + 2b \qquad z = -b \pm \sqrt{x+b^2}$

$$\int \frac{\sqrt{x+b^2}}{x}dx = \int \frac{\sqrt{z^2+2bz+b^2}}{z^2+2bz}(2z+2b)\,dz = \int \frac{\sqrt{(z+b)^2}\,(2z+2b)}{z^2+2bz}dz$$

$$= \int \frac{(z+b)(2z+2b)}{z^2+2bz}dz = \int \frac{2(z+b)^2}{z^2+2bz}dz = \int \frac{2z^2+4bz+2b^2}{z^2+2bz}dz$$

Polynomdivision ergibt $\frac{2z^2+4bz+2b^2}{z^2+2bz} = 2 + \frac{2b^2}{z^2+2bz} = 2 + \frac{2b^2}{z(z+2b)}$

Der Restbruch $\frac{2b^2}{z(z+2b)}$ läßt sich in der Form $\frac{A}{z} + \frac{B}{z+2b}$ darstellen.

Gleichsetzen, ausmultiplizieren, nach z zusammenfassen und vergleichen der Koeffizienten ergibt:

$$\frac{2b^2}{z(z+2b)} = \frac{A}{z} + \frac{B}{z+2b} \qquad |\ \cdot z(z+2b)$$

$$2b^2 = A(z+2b) + Bz = (A+B)z + 2Ab$$

also A+B=0 und A=b, woraus sich B = – b ergibt.

$$\int \frac{2z^2 + 4bz + 2b^2}{z^2 + 2bz}\,dz = \int\left(2 + \frac{b}{z} - \frac{b}{z+2b}\right)dz = 2z + b\ln(z) - b\ln(z+2b) = 2z + b\ln\left(\frac{z}{z+2b}\right)$$

$$= 2\sqrt{x+b^2} - 2b + b\ln\left(\frac{\sqrt{x+b^2} - b}{\sqrt{x+b^2} + b}\right) = 2\sqrt{x+b^2} - 2b + 2b\ln\left(\sqrt{x+b^2} - b\right) - b\ln(x)$$

Hinweis: $\frac{\sqrt{x+b^2} - b}{\sqrt{x+b^2} + b} = \frac{\left(\sqrt{x+b^2} - b\right)^2}{\left(\sqrt{x+b^2} + b\right)\left(\sqrt{x+b^2} - b\right)} = \frac{\left(\sqrt{x+b^2} - b\right)^2}{x + b^2 - b^2} = \frac{\left(\sqrt{x+b^2} - b\right)^2}{x}$

Aufgaben:

a) $\int \frac{2}{(x+1)^2}\,dx$ b) $\int \frac{\ln x}{x^2}\,dx$ c) $\int \frac{2}{x^2 - 1}\,dx$ d) $\int \cos x \cdot e^{\sin x}\,dx$

e) $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$ f) $\int \sqrt{\sqrt{x} + 1}\,dx$ g) $\int \frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}}\,dx$

Mögliche Substitutionen:

$x = e^z$; $x = z - 1$; $x = (z-1)/(z+1)$; $x = \text{asin}\, z$; $z = x^2 + 1$; $z = \sqrt{x} + 1$; $z = 1/x$; $z = \sin u$; $z = \sin x$

Lösungen:

$$\int \frac{2}{(x+1)^2}\,dx$$

Subst.: $x = z - 1$ $dx/dz = 1$ $z = x + 1$

$$\int \frac{2}{(x+1)^2}\,dx = \int \frac{2}{z^2}\,dx = -\frac{2}{z} = -\frac{2}{x+1}$$

$$\int \frac{\ln x}{x^2}\,dx$$

Subst.: $x = e^z$ $dx/dz = e^z$ $z = \ln x$

$$\int \frac{\ln x}{x^2}\,dx = \int \frac{z}{(e^z)^2}\,e^z\,dz = \int \frac{z}{e^z}\,dz = -\frac{z}{e^z} + \int \frac{1}{e^z}\,dz = -\frac{z}{e^z} - \frac{1}{e^z} = -\frac{\ln x}{e^{\ln x}} - \frac{1}{e^{\ln x}} = -\frac{\ln x + 1}{x}$$

$$\int \frac{2}{x^2-1}\,dx$$

Subst.: $x = \frac{z-1}{z+1}$ $dx/dz = \frac{2}{(z+1)^2}$ $z = \frac{x-1}{x+1}$

$$\int \frac{2}{x^2-1}\,dx = \int \frac{2}{\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^2 - 1} \cdot \frac{2}{(z+1)^2}\,dz = \int \frac{2}{\frac{(z-1)^2}{(z+1)^2} - \frac{(z+1)^2}{(z+1)^2}} \cdot \frac{2}{(z+1)^2}\,dz$$

$$= \int \frac{2}{\frac{(z-1)^2 - (z+1)^2}{(z+1)^2}} \cdot \frac{2}{(z+1)^2}\,dz = \int \frac{4}{(z^2+2z+1) - (z^2+2z+1)}\,dz = \int \frac{4}{4z}\,dz = \int \frac{1}{z}\,dz$$

$$= \ln z = \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$$

$$\int \cos x \cdot e^{\sin x}\,dx$$

Substitution: $x = \operatorname{asin} z$ $dx/dz = \frac{1}{\sqrt{1-z^2}}$ $\cos(\operatorname{asin}(z)) = \sqrt{1-z^2}$ $z = \sin x$

$$\int \cos x \cdot e^{\sin x}\,dx = \int \sqrt{1-z^2} \cdot e^z \cdot \frac{1}{\sqrt{1-z^2}}\,dz = \int e^z\,dz = e^z = e^{\sin x}$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$$

Substitution: $z = x^2 + 1 \quad x = \sqrt{z-1} \quad \frac{dx}{dz} = \frac{1}{2\sqrt{z-1}}$

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx = \int \frac{\sqrt{z-1}}{\sqrt{z}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{z-1}}\,dz = \int \frac{1}{2\sqrt{z}}\,dz = \sqrt{z} = \sqrt{x^2+1}$$

$$\int \sqrt{\sqrt{x}+1}\,dx$$

Substitution: $z = \sqrt{x} + 1 \quad x = (z-1)^2 \quad dx/dz = 2z - 2$

$$\int \sqrt{\sqrt{x}+1}\,dx = \int \sqrt{z}\,(2z-2)\,dz = \frac{2}{3} z^{\frac{3}{2}}(2z-2) - \int\left(\frac{2}{3} z^{\frac{3}{2}} \cdot 2\right)dz$$

$$= \frac{2}{3} z^{\frac{3}{2}}(2z-2) - \frac{4\cdot 2}{3\cdot 5} z^{\frac{5}{2}} = \frac{2}{3}\sqrt{z^3}\,(2z-2) - \frac{8}{15}\sqrt{z^5}$$

$$= \frac{20}{15}\sqrt{z^5} - \frac{4}{3}\sqrt{z^3} - \frac{8}{15}\sqrt{z^5} = \frac{12}{15}\sqrt{z^5} - \frac{20}{15}\sqrt{z^3}$$

$$= \frac{12}{15}\sqrt{z^5} - \frac{20}{15}\sqrt{z^3} = \frac{12}{15} z\sqrt{z^3} - \frac{20}{15}\sqrt{z^3}$$

$$= \frac{4}{15}\sqrt{z^3}\,(3z-5) = \frac{4\sqrt{(\sqrt{x}+1)^3}\left(3\sqrt{x}-2\right)}{15}$$

$$\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\,dx$$

Subst.: $z = \frac{1}{x} \quad x = \frac{1}{z} \quad \frac{dx}{dz} = -\frac{1}{z^2} \qquad z = \sin u \quad dz/du = \cos u$

$$\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\,dx = \int \frac{-z}{z^2\sqrt{\frac{1}{z^2}-1}}\,dz = \int \frac{-1}{\sqrt{1-z^2}}\,dz = \int \frac{-\cos u}{\sqrt{1-(\sin u)^2}}\,du = \int -1\,du = -u$$

$$= -\operatorname{asin}(z) = -\operatorname{asin}\left(\frac{1}{x}\right)$$