Partielle Integration

So, wie sich aus der Kettenregel die Regel der linearen Substitution ergibt, kann auch aus der Produktregel eine Regel für das Integrieren von einigen Funktionen gewonnen werden, die das Produkt zweier Teilfunktionen darstellen. Leider kann man weder eine allgemeine Kettenregel noch eine allgemeine Produktregel für das Auffinden von Stammfunktionen angeben. Daher sind solche „Notbehelfe“, d.h. Regeln, die nur in Spezialfällen anwendbar sind, dennoch außerordentlich hilfreich.

Produktregel für (f(x) ·g(x))’: $(f(x)\cdot g(x))' = f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x)$

F statt f, f statt f': $(F(x)\cdot g(x))' = f(x)\cdot g(x) + F(x)\cdot g'(x)$

Integration:

$$\int \left(F(x)\cdot g(x)\right)' \,dx = \int f(x)\cdot g(x)\,dx + \int F(x)\cdot g'(x)\,dx$$

$$F(x)\cdot g(x) = \int f(x)\cdot g(x)\,dx + \int F(x)\cdot g'(x)\,dx \qquad \Big|-\int F(x)\cdot g'(x)\,dx$$

$$\boxed{\int f(x)\cdot g(x)\,dx = F(x)\cdot g(x) - \int F(x)\cdot g'(x)\,dx}$$

Wir erhalten eine sonderbare Formel, wie die Stammfunktion eines Produktes aus zwei Teilfunktionen gefunden werden kann. Die rechte Seite ist komplizierter als die linke!

Diese Formel ist zweifellos nur dann hilfreich, wenn das Integral auf der rechten Seite auflösbar ist.
Dazu muß man

- von f(x) eine Stammfunktion angeben können, nämlich F(x),
- von $F(x)\cdot g'(x)$ eine Stammfunktion angeben können.

Ein Beispiel: Gesucht sei $\int 2x\cdot e^{-x}\,dx$.
Wir legen zunächst fest: $f(x)=2x$ und $g(x)=e^{-x}$.
F(x) ist gut bestimmbar: x^2. Und $g'(x) = -e^{-x}$ ist ebenfalls klar.
Allerdings finden wir vom entsprechenden Produkt $F(x)\,g'(x) = x^2\,(-e^{-x})$ erst recht keine Stammfunktion.

Wenn wir nun aber umgekehrt festlegen: $f(x)=e^{-x}$ und $g(x)=2x$, dann erhalten wir $F(x) = -e^{-x}$ sowie $g'(x) = 2$ und können das Produkt integrieren: $\int F(x)g'(x)\,dx = \int -2e^{-x}dx = -2\int e^{-x}dx = 2e^{-x}$

Insgesamt ergibt sich damit:

$$\int f(x)\cdot g(x)\,dx = F(x)\cdot g(x) - \int F(x)\cdot g'(x)\,dx$$

$$\int e^{-x}\cdot 2x\;dx = -e^{-x}\cdot 2x - 2e^{-x} = -2e^{-x}(x+1)$$

Die Regel der Partiellen Integration ist also für f(x) · g(x) dann anwendbar, wenn man für F(x) · g’(x) eine Stammfunktion angeben kann – und natürlich F(x) kennt.

Oft muß (und kann) man die Regel mehrfach anwenden.

Beispiel: $\int e^{-x}x^2\,dx = -e^{-x}x^2 - \int\left(-e^{-x}2x\right)dx$

Das Integral rechts kann mit Partieller Integration direkt gefunden werden:

$$\int\left(-e^{-x}2x\right)dx = e^{-x}2x - \int\left(e^{-x}\cdot 2\right)dx = 2xe^{-x} - (-2e^{-x}) = e^{-x}(2x+2)$$

So ergibt sich: $\int e^{-x}x^2\,dx = -e^{-x}x^2 - \int\left(-e^{-x}2x\right)dx = -e^{-x}x^2 - e^{-x}(2x+2) = -e^{-x}(x^2+2x+2)$

Im Zusammenhang mit dem letzten Beispiel sollte darauf hingewiesen werden, daß Stammfunktion nicht eindeutig bestimmt werden können, sondern daß man beliebig eine Konstante addieren kann.
Im letzten Beispiel wurde die Partielle Integration zweimal angewendet. Hat eine im Vorbereitungsschritt hinzugefügte Konstante Auswirkung auf den zweiten Schritt?

Für $\int (-e^{-x} 2x) \mathrm{dx}$ ergibt sich eigentlich:

$$\int \left(-e^{-x}2x\right)dx = e^{-x}2x - \int \left(e^{-x} \cdot 2\right) dx = 2xe^{-x} - (-2e^{-x} + C) = e^{-x}(2x+2) - C$$

Dies in den Hauptschritt eingesetzt, zeigt aber, daß die Konstante eine solche bleibt, da sie nicht nochmal mitintegriert wird:

$$\int e^{-x}x^2\, dx = -e^{-x}x^2 - \int \left(-e^{-x}2x\right)dx = -e^{-x}x^2 - e^{-x}(2x+2) + C = -e^{-x}(x^2+2x+2) + C$$

Es ist daher in meinen Augen zulässig, bei solchen rekursiven Prozessen die Konstante wegzulassen und sie nach Bedarf erst am Schluß zu ergänzen.

Das Beispiel gibt Anlaß, nach einer allgemeinen Formel für die Stammfunktion von $\int e^{mx} \cdot x^n\, dx$ zu suchen.

Im ersten Schritt findet man:
$$\int e^{mx}x^n\, dx = \frac{e^{mx}}{m}x^n - \int \frac{e^{mx}}{m}nx^{n-1}\, dx$$
$$= \frac{e^{mx}x^n - \int e^{mx}nx^{n-1}\, dx}{m}$$

Für das Integral rechts im Zähler findet man:
$$\int e^{mx}nx^{n-1}\, dx = \frac{e^{mx}}{m}nx^{n-1} - \int \frac{e^{mx}}{m}n(n-1)x^{n-2}\, dx$$
$$= \frac{ne^{mx}x^{n-1} - \int e^{mx}n(n-1)x^{n-2}\, dx}{m}$$

Im zweiten Schritt also:
$$\int e^{mx}x^n\, dx = \frac{e^{mx}x^n - \int e^{mx}nx^{n-1}\, dx}{m}$$
$$= \frac{e^{mx}x^n - \frac{ne^{mx}x^{n-1} - \int e^{mx}n(n-1)x^{n-2}\, dx}{m}}{m}$$
$$= \frac{me^{mx}x^n - ne^{mx}x^{n-1} + \int e^{mx}n(n-1)x^{n-2}\, dx}{m^2}$$
$$= \frac{e^{mx}(mx^n - nx^{n-1}) + \int e^{mx}n(n-1)x^{n-2}\, dx}{m^2}$$

Für das Integral rechts findet man wieder:
$$\int e^{mx}n(n-1)x^{n-2}\, dx = \frac{e^{mx}}{m}n(n-1)x^{n-2} - \int \frac{e^{mx}}{m}n(n-1)(n-2)x^{n-3}\, dx$$
$$= \frac{n(n-1)e^{mx}x^{n-2} - \int e^{mx}n(n-1)(n-2)x^{n-3}\, dx}{m}$$

Im dritten Schritt erhält man somit:

$$\int e^{mx}x^n\ dx = \frac{e^{mx}(mx^n - nx^{n-1}) + \int e^{mx}n(n-1)x^{n-2}\ dx}{m^2}$$

$$= \frac{e^{mx}(mx^n - nx^{n-1}) + \dfrac{n(n-1)e^{mx}x^{n-2} - \int e^{mx}n(n-1)(n-2)x^{n-3}\ dx}{m}}{m^2}$$

$$= \frac{e^{mx}\left(m^2x^n - mnx^{n-1} + n(n-1)x^{n-2}\right) - \int e^{mx}n(n-1)(n-2)x^{n-3}\ dx}{m^3}$$

Offensichtlich erscheint im i-ten Schritt im Nenner m^i. Im vorderen Summanden im Zähler befindet sich in der Klammer eine Summe mit alternierenden Vorzeichen. Jeder Summand enthält eine Potenz von m, eine Potenz von x und ein Produkt aus n mit i-2 seiner Vorgänger.
Die Potenzen von m fallen von i-1 bis 0. Die Potenzen von x fallen von n bis n-(i-1).
Das Integral wechselt in jedem Schritt sein Vorzeichen. Unter dem Integral erscheint x im i-ten Schritt in der (n-i)-ten Potenz. Im i-ten Schritt wird man damit insgesamt erhalten:

$$\int e^{mx}x^n\ dx = \frac{e^{mx}\left(m^{i-1}x^n - m^{i-2}nx^{n-1} + n(n-1)\cdots(-1)^{i-1}(n-i+2)x^{n-i+1}\right) + (-1)^i\int e^{mx}n(n-1)(n-2)\cdots(n-i+1)x^{n-i}\ dx}{m^i}$$

(Alternierende Vorzeichen bekommt man mit $(-1)^i$).
Im n-ten Schritt schließlich:

$$\int e^{mx}x^n\ dx = \frac{e^{mx}\left(m^{n-1}x^n - m^{n-2}nx^{n-1} + m^{n-3}n(n-1)x^{n-2} - \cdots + (-1)^{n-1}(n-n+2)x^{n-n+1}\right) + (-1)^n\int e^{mx}n(n-1)(n-2)\cdots(n-n+1)x^{n-n}\ dx}{m^n}$$

$$= \frac{e^{mx}\left(m^{n-1}x^n - m^{n-2}nx^{n-1} + m^{n-3}n(n-1)x^{n-2} - \cdots + (-1)^{n-1}n(n-1)(n-2)\cdots 2x\right) + (-1)^n\int e^{mx}n(n-1)(n-2)\cdots x^0\ dx}{m^n}$$

$$= \frac{e^{mx}\left(m^{n-1}x^n - m^{n-2}nx^{n-1} + m^{n-3}n(n-1)x^{n-2} - \cdots + (-1)^{n-1}n(n-1)(n-2)\cdots 2x\right) + (-1)^n\int e^{mx}n!\ dx}{m^n}$$

$$= \frac{e^{mx}\left(m^{n-1}x^n - m^{n-2}nx^{n-1} + m^{n-3}n(n-1)x^{n-2} - \cdots + (-1)^{n-1}n(n-1)(n-2)\cdots 2x\right) + (-1)^n n!\dfrac{e^{mx}}{m}}{m^n}$$

$$= \frac{e^{mx}\left(m^nx^n - m^{n-1}nx^{n-1} + m^{n-2}n(n-1)x^{n-2} - \cdots + (-1)^{n-1}mn(n-1)(n-2)\cdots 2x + (-1)^n n!\right)}{m^{n+1}}$$

Im Ergebnis:

$$\boxed{\int e^{mx}x^n\ dx = \frac{e^{mx}\left(m^nx^n - m^{n-1}nx^{n-1} + m^{n-2}n(n-1)x^{n-2} - \cdots + (-1)^{n-1}mn(n-1)(n-2)\cdots 2x + (-1)^n n!\right)}{m^{n+1}}}$$

Dankbare Aufgabe: Beweise die Formel durch Ableiten der rechten Seite nach x.

Beispiel:

$$\int e^{3x}\cdot x^4\,dx = \frac{e^{3x}\left(3^4x^4 - 3^3\cdot 4x^3 + 3^2\cdot 4\cdot 3x^2 - 3^1\cdot 4\cdot 3\cdot 2x + 4!\right)}{3^{4+1}}$$

$$= \frac{e^{3x}\left(81x^4 - 108x^3 + 108x^2 - 72x + 24\right)}{243}$$

$$= \frac{e^{3x}\left(27x^4 - 36x^3 + 36x^2 - 24x + 8\right)}{81}$$

$$= e^{3x}\left(\frac{1}{3}x^4 - \frac{4}{9}x^3 + \frac{4}{9}x^2 - \frac{8}{27}x + \frac{8}{81}\right)$$

Weitere Beispiele:

1.)

$$\int \cos(x)\,\sin(x)\;\,dx = \sin(x)\,\sin(x) - \int \sin(x)\,\cos(x)\,dx$$

Huch. Das war wohl nicht so erfolgreich. Oder? Weiteres Rechnen führt doch zum Erfolg:

$$\int \cos(x)\,\sin(x)\;\,dx = \sin(x)\,\sin(x) - \int \sin(x)\,\cos(x)\,dx \qquad \Big| + \int \sin(x)\,\cos(x)\,dx$$

$$2\int \cos(x)\,\sin(x)\;\,dx = \sin^2(x)$$

$$\int \cos(x)\,\sin(x)\;\,dx = \frac{\sin^2(x)}{2}$$

Das führt auf die hübsche Regel: $\boxed{\int f'(x) f(x)\;\,dx = \frac{\left(f(x)\right)^2}{2}}$

Besser noch! Es gilt allgemein: $\boxed{\int f'(x)\cdot\left(f(x)\right)^n\;\,dx = \frac{\left(f(x)\right)^{n+1}}{n+1}}$

Beweis durch Ableiten der rechten Seite:

$$\left(\frac{\left(f(x)\right)^{n+1}}{n+1}\right)' = \frac{n+1}{n+1}\left(f(n)\right)^n\cdot f'(x) = f'(x)\cdot\left(f(n)\right)^n$$

also durch einfache Anwendung der Kettenregel.

2.)

$$\int \sin^2(ax+b)\;\,dx = \frac{-\cos(ax+b)\,\sin(ax+b)}{a} - \int \frac{-\cos(ax+b)}{a}\cdot a\cdot\cos(ax+b)\,dx$$

$$= \frac{-\sin(ax+b)\cos(ax+b)}{a} + \int \cos^2(ax+b)\,dx$$

Wegen sin²(x)+cos²(x)=1 ist

$$\int \sin^2(ax+b)\;\,dx = \int 1\,dx\; - \int \cos^2(ax+b)\;\,dx = x - \int \cos^2(ax+b)\;\,dx$$

und damit:

$$\int \cos^2(ax+b)\,dx = x - \int \sin^2(ax+b)\;\,dx$$

Somit bekommt man:

$$\int \sin^2(ax+b)\;\,dx = -\frac{\sin(ax+b)\cos(ax+b)}{a} + \int \cos^2(ax+b)\,dx$$

$$= -\frac{\sin(ax+b)\cos(ax+b)}{a} + x - \int \sin^2(ax+b)\;\,dx$$

$$2\int \sin^2(ax+b)\;\,dx = -\frac{\sin(ax+b)\cos(ax+b)}{a} + x$$

$$\int \sin^2(ax+b)\;\,dx = -\frac{\sin(ax+b)\cos(ax+b)}{2a} + \frac{x}{2}$$

und wegen $2\sin(x)\,\cos(x) = \sin(2x)$:

$$\boxed{\int \sin^2(ax+b)\;\,dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin(2ax+2b)}{4a}}$$