Die Herleitung der Logarithmengesetze aus den Potenzgesetzen

Der Logarithmus von a zur Basis b ist diejenige Zahl x, mit der b potenziert werden muß, um a zu erhalten.

Wenn $b^x = a$ gilt, dann ist also $\log_b a = x$ (1)

Wegen $a = b^x$ ist daher $\log_b b^x = \log_b a = x$ (2)

Analogie zum 1. Potenzgesetz

$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ | Beide Seiten werden zur Basis a logarithmiert

$\log_a (a^m \cdot a^n) = \log_a (a^{m+n})$ | Rechts kann (2) angewendet werden

$\log_a (a^m \cdot a^n) = m + n$ (3)

$a^m \cdot a^n$, das Argument des Logarithmus auf der linken Seite der Gleichung, ist ein Produkt (Multiplikation). Überlegt man nun, was der Logarithmus eines Produktes allgemein ist, so kann man setzen:

$u = a^m$ (4)

$v = a^n$ (5)

Nach (1) gilt damit

$\log_a u = m$ (6)

$\log_a v = n$ (7)

Nun kann in Gleichung (3) in der linken Seite a^m mithilfe von (4) und a^n mithilfe von (5) ersetzt werden; und auf der rechten Seite m und n mithilfe von (6) und (7):

$\log_a (a^m \cdot a^n) = m + n$

$\mathbf{\log_a (u \cdot v) = \log_a u + \log_a v}$ (8)

Der Logarithmus eines Produktes ist also die Summe der Logarithmen der Faktoren.

Analogie zum 2. Potenzgesetz

$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ | Beide Seiten werden zur Basis a logarithmiert

$\log_a \left(\frac{a^m}{a^n} \right) = \log_a a^{m-n}$ | Rechts kann (2) angewendet werden

$\log_a \left(\frac{a^m}{a^n} \right) = m - n$ (9)

Jetzt kann in Gleichung (9) wieder wie oben mithilfe von (4), (5), (6) und (7) ersetzt werden:

$\mathbf{\log_a \left(\frac{u}{v} \right) = \log_a u - \log_a v}$ (10)

Der Logarithmus eines Bruchs ist die Differenz aus den Logarithmen von Zähler und Nenner.

Analogie zum 3. Potenzgesetz

$(a^m)^n = a^{m\,n}$ | Logarithmieren zur Basis a

$\log_a ((a^m)^n) = \log_a a^{m\,n}$ | Regel aus (2) anwenden

$\log_a ((a^m)^n) = m \cdot n$ (11)

Ersetzen von a^m durch u und m durch $\log_a u$, wie oben; aber Ersetzen von **n** durch v:

$\log_a u^v = \log_a(u) \cdot v$

oder übersichtlicher

$$\mathbf{\log_a u^v = v \cdot \log_a u} \qquad (12)$$

<u>Der Logarithmus einer Potenz mit der Basis b und dem Exponenten x ist das Produkt aus dem Logarithmus der Basis und dem Exponenten.</u>

Basiswechsel

Auf dem Taschenrechner stehen der dekadische Logarithmus (zur Basis 10) und der natürliche Logarithmus zur Basis e (=2,71828182845905...) zur Verfügung. Häufig muß man aber Logarithmen zu anderen Basen als 10 oder e berechnen. Das ist zum Glück leicht möglich, wie wir gleich sehen werden.

Zunächst überlegen wir uns, was passiert, wenn man eine Zahl mit einem Logarithmus potenziert, dessen Basis sie selbst ist, also etwa $b^{\log_b x}$.

Die Definition des Logarithmus besagt, daß $\log_b x$ diejenige Zahl ist, mit der man b potenzieren muß, um x zu erhalten. Da hier b eben genau damit potenziert wird, folgt sofort, daß gilt:

$$b^{\log_b x} = x \qquad (13)$$

Wozu soll das nun gut sein?
Man sieht es, wenn man den Ausdruck $b^{\log_b x}$ zu einer anderen Basis als b logarithmiert: $\log_a\left(b^{\log_b x}\right)$

Aus Gleichung (13) weiß man, daß $\log_a\left(b^{\log_b x}\right)$ dasselbe wie $\log_a(x)$ ist.
Aus dem Logarithmengesetz (12) weiß man aber auch, daß $\log_a\left(b^{\log_b x}\right)$ dasselbe wie $\log_b x \cdot \log_a b$ ist, denn man kann den Exponenten als Faktor vor den Logarithmus schreiben.

Damit ergibt sich

$$\log_b x \cdot \log_a b = \log_a x \qquad (14)$$

Division durch $\log_a b$ ergibt:

$$\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b} \qquad (15)$$

Genau hinsehen! Rechts stehen nur Logarithmen zur Basis a, links steht ein einzelner Logarithmus der Zahl x zur Basis b.
Steht irgendein Logarithmus zur Verfügung, so kann mit diesem Zusammenhang jeder andere Logarithmus berechnet werden!

Man berechnet einfach den Logarithmus der fraglichen Zahl zur vorhandenen Basis und teilt das Ergebnis durch den vorhandenen Logarithmus der nicht vorhandenen Basis.
Klingt komplizierter, als es ist.

Ein Beispiel macht es sicherlich klarer:
Berechnet werden soll die Lösung der Gleichung $2^x = 1000000$, also $x = \log_2 1000000$.

Der „duale“ Logarithmus ist auf dem Taschenrechner nicht vorhanden. Berechne stattdessen mit der Funktionstaste [ln] (d.h. mit dem natürlichen Logarithmus) so:

$$\log_2 1000000 = \frac{\ln 1000000}{\ln 2} = \frac{13{,}8155105579643}{0{,}693147180559945} = 19{,}9315685693242$$

Man kann es auch mit dem dem dekadischen Logarithmus (Basis 10) berechnen, der in der Regel lg abgekürzt wird (Taste [log] oder [lg]):

$$\log_2 1000000 = \frac{\lg 1000000}{\lg 2} = \frac{6}{0{,}301029995663981} = 19{,}9315685693242$$

Tatsächlich kommt unabhängig von der Verwendung von ln oder lg dasselbe heraus, und die Probe ergibt auf dem Taschenrechner richtig $2^{19,9315685693242} = 1000000$

Bei genauerer Rechnung (spezielles Computerprogramm) ist $2^{19,9315685693242} = 1000000{,}000000017961369069...$
Das liegt daran, daß Logarithmen meist keine rationalen Zahlen sind und der Taschenrechner nur Näherungswerte berechnen kann.

Zusammenfassung

Definition:

$b^x = a \quad \Leftrightarrow \quad x = \log_b a$ (Definition des Logarithmus)

$\log_a a^x = x$

Folgerungen: $\log_a 1 = \log_a a^0 = 0$

$\log_a a = \log_a a^1 = 1$

$a^{\log_a x} = x$

Logarithmengesetze:

$\log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$ (Logarithmieren macht aus einem Produkt eine Summe)

$\log_a \left(\frac{x}{y} \right) = \log_a x - \log_a y$ (aus Quotient wird Differenz)

$\log_a (x^y) = y \cdot \log_a x$ (aus Potenz wird Produkt)

$\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}$ (Basiswechsel)