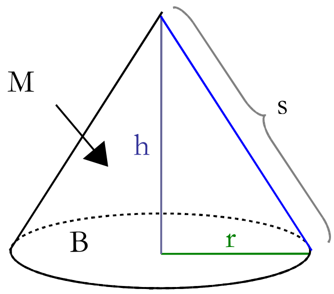
Mantelfläche des Kegels

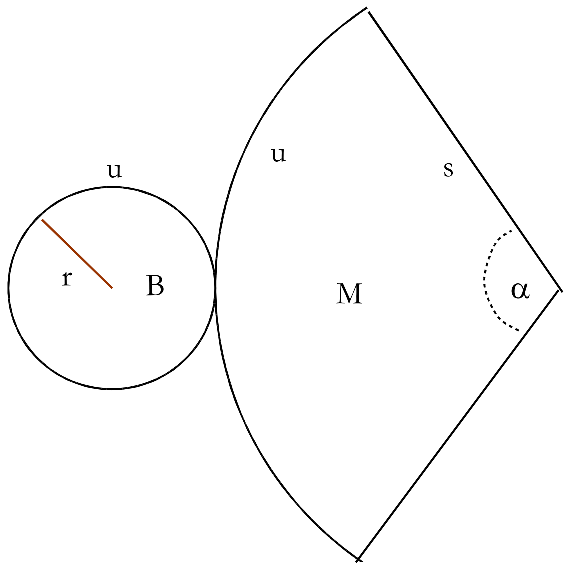


Für den Umfang des Bodenkreises B gilt $u = 2\pi r$.
Dies ist auch die Länge des Bogens der Mantelfläche.
Ergänzt man die Mantelfläche zum Vollkreis, so hat dieser den Umfang $u' = 2\pi s$.
Der Anteil des Kreisausschnitts M am Vollkreis ist demnach

$$\frac{u}{u'} = \frac{2\pi r}{2\pi s} = \frac{r}{s}$$

Infolgedessen ist $\alpha = 360° \cdot \frac{r}{s}$ und $M = \pi s^2 \cdot \frac{r}{s} = \pi rs$.

(πs^2 ist der Flächeninhalt des gedachten Vollkreises.)



Mantelfläche des Kegelstumpfs

Für den Mantel des Kegelstumpfes gilt analog mit modifizierten Bezeichnungen (siehe dritte Skizze), daß der Anteil des Netzes an einem kompletten Kreisring $\frac{r_1}{t}$ beträgt. Es ist somit

$$M = \frac{r_1}{t}\left(\pi t^2 - \pi s'^2\right)$$

$$M = \frac{r_1}{t}\pi\left(t^2 - s'^2\right) \qquad (1)$$

Wegen $s' = t - s$ und $s'^2 = (t - s)^2 = t^2 - 2st + s^2$,
läßt sich in (1) s'^2 ersetzen:

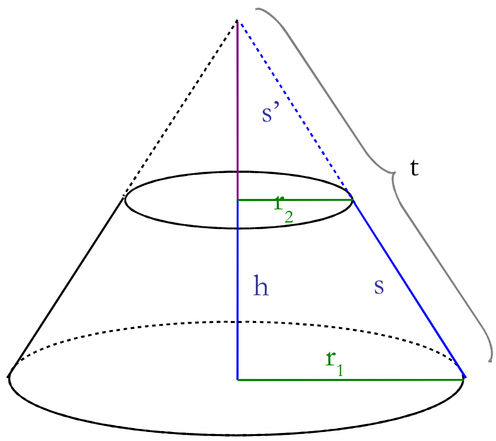
$$M = \frac{r_1}{t}\pi\left(t^2 - s'^2\right)$$

$$M = \frac{r_1}{t}\pi\left(t^2 - (t^2 - 2st + s^2)\right)$$

$$M = \frac{r_1}{t}\pi\left(2st - s^2\right)$$

$$M = r_1\pi\left(2s - \frac{s^2}{t}\right)$$

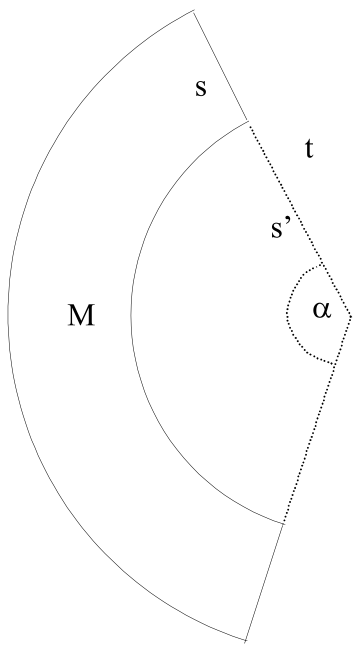
$$M = r_1\pi s\left(2 - \frac{s}{t}\right) \qquad (2)$$



Teilt man $s = t - s'$ durch t, erhält man $\frac{s}{t} = 1 - \frac{s'}{t}$.

Nach dem 2. Strahlensatz gilt: $\frac{s'}{t} = \frac{r_2}{r_1}$.

Daraus folgt $\frac{s}{t} = 1 - \frac{r_2}{r_1}$, und man kann in (2) ersetzen:



$$M = r_1\pi s\left(2 - \frac{s}{t}\right) = r_1\pi s\left(2 - \left(1 - \frac{r_2}{r_1}\right)\right) = r_1\pi s\left(1 + \frac{r_2}{r_1}\right) = r_1\pi s + r_2\pi s = \pi s\left(r_1 + r_2\right)$$

$$M = \pi s\left(r_1 + r_2\right)$$