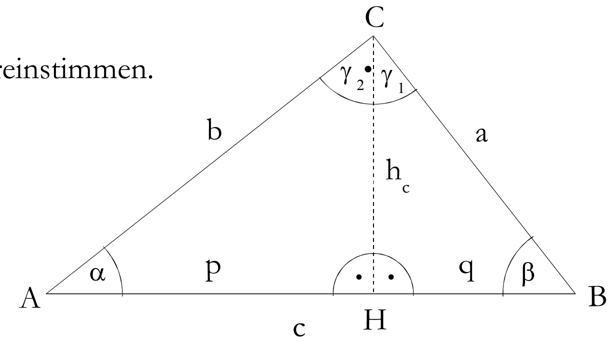
Die Ähnlichkeitssätze im rechtwinkligen Dreieck



Zwei Dreiecke sind sich ähnlich, wenn sie in ihren Winkeln übereinstimmen.

Im Dreieck ABC mit $\gamma = 90°$ und dem Höhenfußpunkt H entstehen die Teildreiecke AHC und HBC, wenn H der Fußpunkt der Höhe h_c ist (siehe Abbildung).

Diese drei Dreiecke sind einander alle ähnlich, denn sie besitzen jeweils drei gleiche Innenwinkel:

c ist hier die Hypotenuse
a und b sind hier die Katheten
p und q heißen
Hypotenusenabschnitte

Winkelsumme für Dreieck ABC:

$\alpha + \beta + \gamma = 180°$

$\alpha + \beta + 90° = 180°$

$\alpha + \beta = 90° \qquad (1)$

Winkelsumme für AHC:

$\alpha + 90° + \gamma_2 = 180°$

$\alpha + \gamma_2 = 90°$

$\alpha = 90° - \gamma_2 \qquad (2)$

Winkelsumme für HBC:

$90° + \beta + \gamma_1 = 180°$

$\beta + \gamma_1 = 90°$

$\beta = 90° - \gamma_1 \qquad (3)$

Mit (2) wird α in (1) ersetzt:

$\alpha + \beta = 90°$

$90° - \gamma_2 + \beta = 90°$

$\gamma_2 = \beta$

Mit (3) wird β in (1) ersetzt:

$\alpha + \beta = 90°$

$\alpha + 90° - \gamma_1 = 90°$

$\gamma_1 = \alpha$

Somit haben alle drei Dreiecke die Innenwinkel α, β und 90° und sind damit einander ähnlich.

Einander entsprechende Seiten bilden daher den gleichen Quotienten. Zum Beispiel ist der Quotient aus den jeweils längsten Seiten gleich dem der jeweils kürzesten Seiten. Eine Tabelle schafft Übersicht:

Dreieck	längste Seite	mittlere Seite	kürzeste Seite
ABC	c	b	a
AHC	b	p	h_c
HBC	a	h_c	q

Es lassen sich folgende Verhältnisgleichungen aufstellen:

(1) $\frac{c}{b} = \frac{b}{p}$ (2) $\frac{c}{b} = \frac{a}{h_C}$ (3) $\frac{b}{p} = \frac{a}{h_C}$

(4) $\frac{c}{a} = \frac{b}{h_C}$ (5) $\frac{c}{a} = \frac{a}{q}$ (6) $\frac{b}{h_C} = \frac{a}{q}$

(7) $\frac{b}{a} = \frac{p}{h_C}$ (8) $\frac{b}{a} = \frac{h_C}{q}$ (9) $\frac{p}{h_C} = \frac{h_C}{q}$

Die Gleichungen, die nur drei verschiedene Strecken enthalten, werden so umgeformt, daß die Brüche wegfallen (durch Multiplikation mit den Nennern). So ergeben sich die Sätze des Euklid:

(1) $\mathbf{b^2 = c \cdot p}$
(5) $\mathbf{a^2 = c \cdot q}$ (Kathetensätze)
(9) $\mathbf{h^2 = p \cdot q}$ (Höhensatz)

Addition der Kathetensätze ergibt:

$a^2 + b^2 = c \cdot q + c \cdot p = c \cdot (q+p) = c \cdot c = c^2$

$\mathbf{a^2 + b^2 = c^2}$ (Satz des Pythagoras)

© Arndt Brünner, Oktober 2005

http://www.arndt-bruenner.de/mathe