Die Lösungsformel für ganzrationale Gleichungen dritten Grades

In ganzrationalen Gleichungen dritten Grades kommt die Unbekannte in der dritten Potenz vor. Man kann sie allgemein so schreiben:

$$ax^3+bx^2+cx+d=0$$

bzw. nach Division durch a in der Normalform

$$x^3+\frac{b}{a}x^2+\frac{c}{a}x+\frac{d}{a}=0$$

Indem man x durch $y-\frac{b}{3a}$ ersetzt (substituiert), verschwindet der quadratische Summand:

$$\left(y-\frac{b}{3a}\right)^3 + \frac{b}{a}\left(y-\frac{b}{3a}\right)^2 + \frac{c}{a}\left(y-\frac{b}{3a}\right) + \frac{d}{a}=0$$

$$y^3-\frac{b}{a}y^2+\frac{b^2}{3a^2}y-\frac{b^3}{27a^3}+\frac{b}{a}y^2-\frac{2b^2}{3a^2}y+\frac{b^3}{9a^3}+\frac{c}{a}y-\frac{bc}{3a^2}+\frac{d}{a}=0$$

$$y^3+\frac{b^2}{3a^2}y-\frac{2b^2}{3a^2}y+\frac{c}{a}y-\frac{b^3}{27a^3}+\frac{b^3}{9a^3}-\frac{bc}{3a^2}+\frac{d}{a}=0$$

$$y^3+\left(\frac{b^2}{3a^2}-\frac{2b^2}{3a^2}+\frac{c}{a}\right)y-\frac{b^3}{27a^3}+\frac{b^3}{9a^3}-\frac{bc}{3a^2}+\frac{d}{a}=0$$

$$y^3 + \frac{3ac-b^2}{3a^2}y + \frac{2b^3-9abc+27a^2d}{27a^3} = 0$$

Nun setzt man der Übersicht zuliebe $p := \frac{3ac-b^2}{3a^2}$ und $q := \frac{2b^3-9abc+27a^2d}{27a^3}$
und kann schreiben:

$$y^3 + py + q = 0$$

Zerlegt man nun y in die Summe u + v, so gewinnt man

$$(u+v)^3 + p(u+v) + q = 0$$

$$u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3 + pu + pv + q = 0$$

Nach leichtem Umsortieren

$$u^3 + v^3 + q + pu + pv + 3u^2v + 3uv^2 = 0$$

kann man die Möglichkeit dieser Faktorisierung erkennen:

$$u^3 + v^3 + q + (p + 3uv)(u + v) = 0$$

Nun sind die beiden Zahlen u und v noch nicht genau bestimmt, so daß man zusätzlich die Bedingung $-p = 3uv$ formulieren kann. (Es ist möglich, zu allen y und p passende u und v zu finden mit $u+v=y$ und $-p = 3uv$.)

Durch $-p=3uv$ wird der Ausdruck $(p + 3uv)(u + v)$ Null und es bleibt

$$u^3 + v^3 + q = 0$$

Zusammen mit $-p=3uv$ haben wir nun ein Gleichungssystem mit den beiden Unbekannten u und v, das mit einigen Tricks lösbar ist. Beide Gleichungen schreiben wir so, daß u und v links alleine stehen:

$$\left| \begin{array}{c} u^3 + v^3 = -q \\ uv = -\dfrac{p}{3} \end{array} \right|$$

Wie werden wir mit den dritten Potenzen fertig?

Da uns nicht einfällt, wie wir sie wegbekommen (schließlich sind wir auf dem Weg zu einer Lösungsformel, haben sie aber noch nicht), passen wir einfach die zweite Gleichung an und erheben sie in die dritte Potenz:

$$\left| \begin{array}{c} u^3 + v^3 = -q \\ u^3v^3 = -\dfrac{p^3}{27} \end{array} \right|$$

Nun fällt uns eine Verwandtschaft mit der ersten Binomischen Formel auf. Dort tauchen auch Variablen einzeln und als doppeltes Produkt in der Mitte auf. Allerdings müßten u^3 und v^3 als $(u^3)^2 = u^6$ und analog v^6 auftreten. Quadrieren wir die erste Gleichung:

$$\left| \begin{array}{c} u^6 + 2u^3v^3 + v^6 = q^2 \\ u^3v^3 = -\dfrac{p^3}{27} \end{array} \right|$$

Nun gäbe es die Möglichkeit, die erste Gleichung mithilfe der zweiten zu einem „Binom mit Minus“ zu machen. Indem man nämlich das Vierfache der zweiten Gleichung von der ersten abzieht, bekommt man dort das ausmultiplizierte „Ergebnis“ von $(u^3 - v^3)^2$:

$$\left| \begin{array}{c} u^6 + 2u^3v^3 + v^6 = q^2 \\ -4u^3v^3 = \dfrac{4p^3}{27} \end{array} \right|$$

$$u^6 - 2u^3v^3 + v^6 = q^2 + \frac{4p^3}{27}$$

$$(u^3 - v^3)^2 = q^2 + \frac{4p^3}{27}$$

$$u^3 - v^3 = \pm\sqrt{q^2 + \frac{4p^3}{27}}$$

Aha! Und was sollte das jetzt gebracht haben ?

Nun, sehr viel, wenn man bedenkt, was man mit dieser Gleichung im Zusammenspiel mit der Gleichung $u^3 + v^3 = -q$ anstellen kann!
Addiert man sie, fällt v^3 weg und wir erhalten eine Formel für u^3.
Subtrahiert man sie, fällt u^3 weg und wir erhalten eine Formel für v^3:

Addieren:

$$\begin{aligned} u^3 - v^3 &= \pm\sqrt{q^2 + \frac{4p^3}{27}} \\ u^3 + v^3 &= -q \\ \hline 2u^3 &= -q \pm\sqrt{q^2 + \frac{4p^3}{27}} \end{aligned}$$

$$u^3 = \frac{-q \pm\sqrt{q^2 + \frac{4p^3}{27}}}{2}$$

Subtrahieren :

$$\begin{aligned} u^3 - v^3 &= \pm\sqrt{q^2 + \frac{4p^3}{27}} \\ u^3 + v^3 &= -q \\ \hline -2v^3 &= \pm\sqrt{q^2 + \frac{4p^3}{27}} + q \end{aligned}$$

$$v^3 = \frac{-q \pm\sqrt{q^2 + \frac{4p^3}{27}}}{2}$$

Man kann die Nenner 2 (als Quadrat 4) in die Wurzeln ziehen sowie die 27 als 3^3 auffassen und erhält damit

$$u^3 = -\frac{q}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3} \qquad \text{und} \qquad v^3 = -\frac{q}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}$$

Weil u und v in den Gleichungen $u+v=y$ und $3uv=-p$ gegeneinander austauschbar sind und $u=v$ im allgemeinen ausgeschlossen werden kann, genügt es, bei u die positive und bei v die negative Wurzel zu betrachten. (Oder anders herum, was auf das selbe herausläuft.)

Damit erhält man wegen $y = u + v$ die Lösungsformel für die Gleichung $y^3 + py + q = 0$

$$y = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$