RESUMO PARA PROVA DA “IDENTIDADE DE EULER”

Este texto é parte integrante de um conjunto de textos que objetivam conduzir ao entendimento das equações aplicadas ao eletromagnetismo.

É um bom começo para quem quer se aprofundar no assunto.

A motivação para este artigo consiste no fato de que a “Identidade de Euler” é utilizada freqüentemente na resolução de Equação Diferenciais Ordinárias – EDO- aplicadas a fenômenos harmônicos.

Uma vez que:

- as ondas são representadas em geral por funções harmônicas (formadas por senos e co-senos);
- em eletromagnetismo há os ***<u>fasores</u>*** – que possuem componentes imaginários;

a “Identidade de Euler” é utilizada intensamente não somente na solução de problemas que envolvem ondas como qualquer fenômenos harmônicos (que possuem oscilações no tempo) em geral. Alguns exemplos de aplicações são citados a seguir:

- física e física matemática em fenômenos harmônicos;
- engenharia mecânica (mecânica dos fluidos e termodinâmica);
- engenharia elétrica e eletrônica (eletromagnetismo, teoria dos circuitos etc);
- engenharia telecomunicações (processamento de sinais, propagação de ondas etc);
- engenharia civil (hidráulica, cálculo estrutural para estrutura dinâmicas, etc);
- todas as demais áreas onde ocorrem fenômenos harmônicos;

O bom entendimento da “Identidade de Euler” auxilia, junto com outras operações matemáticas e estudos de física, no entendimento das equações que regem o funcionamento de muitos fenômenos da natureza.

Em termos históricos, pode-se dizer que a “Identidade de Euler”, permitiu o tratamento analítico da matemática e foi utilizada para resolver vários problemas matemáticos posteriores, inclusive as Equações de Maxwell que deram origem à teoria do Eletromagnetismo e das Ondas que foram utilizadas posteriormente como origem das teorias “ondulatória” e posteriormente na física quânticas por Einstein.

Em termos matemáticos, a “Identidade de Euler” adquiri bastante interesse ao relacionar os senos e co-senos com o “Número de Euler”, cuja “Identidade de Euler” é dado por:

$$e^{(x+yi)} = e^{x}\left(\cos y + i \operatorname{sen} y\right)$$ onde $\boldsymbol{i}$ é o número imaginário.

Ao relacionar o número de Euler com números complexos e as funções trigonométricas seno e co-seno (harmônicas), é criado um artifício matemático que simplifica bastante a solução de Integração e derivação de números complexos, um vez que:

$\left(e^{x}\right)' = e^{x}$,ou seja:

$f(x)' = f(x)$ com $f(x) = e^{x}$;

O objetivo deste texto é proporcionar fundamentos matemáticos para o entendimento das equações baseadas na “Identidade de Euler” desde o entendimento de seus elementos básicos. Esse entendimento será construído de forma gradual, e desde os primórdios dos conceitos. Desta forma, serão visto:

- conceitos de formação de funções;
- conceitos de funções periódicas;
- definição de funções harmônicas;
- conceitos de funções transcedentes elementares;
- conceitos de seqüências infinitas;
- séries harmônicas;
- séries de MacLaurin e Taylor para expansão do números de Euler;
- princípio de formação de funções matemáticas;
- demonstração da “Identidade de Euler” por expansão em séries;

PRINCÍPIOS DE FORMAÇÃO DE FUNÇÕES

Uma vez que as funções podem ser representadas por séries que são formadas a partir de seqüências, para entender a origem (formação) das funções são necessário conceitos sobre seqüências. Por sua vez, para entender seqüências, são necessário conceitos sobre as séries.

Portanto, nos próximos tópicos serão fornecidos conceitos sobre funções importantes e suas aplicação. A seguir, será abordado gradativamente cada conceito -de seqüência e de séries- visando atingir um entendimento mais completo sobre as funções formadas pela Identidade de Euler e, a partir disso, demonstrar sua validade.

KAPLAN-pag.435

DEFINIÇÃO DE FUNÇÕES PERIÓDICAS:

Dizemos: f tem um período 2 . De um modo geral uma função *f(x)* tal que

$$f(x+p) = f(x) \quad (p \neq 0) \qquad \text{(7-3)}$$

para to x é dita *periódica* com *período* p. Deve-se notar que *cos2x*, tem, além do período 2 , o período e, de maneira genérica, *cos nx* e *sen nx* tem período $2\ /n$. No entanto 2 é o único desses período que é compartilhado por todos os termos da série.

USO DAS FUNÇÕES PERIÓDICAS:

... tais funções periódicas aparecem em uma grande variedade de problemas físicos: vibrações de uma corda, movimento dos planetas ao redor do Sol, rotação da Terra em torno de seu eixo, movimento de um pêndulo, marés e movimento ondulatório em geral, vibrações de uma corda de violino, de uma coluna de ar (por exemplo, numa flauta), e sons musicais em geral. A teoria moderna da luz é baseada na “mecânica ondulatória”, com vibrações periódicas como característica; o espectro de uma molécula é simplesmente uma representação das diferentes vibrações que têm lugar simultaneamente nela. Circuitos elétricos envolvem muitas variáveis periódicas; por exemplo, a corrente alternada. O fato de uma viagem ao redor do globo envolverr uma variação total de longitude de 360º é uma expressão do fato de serem as coordenadas cartesianas de posição no globo funções periódicas da longitude, com período de 360º; muitos outros exemplos de tais funções periódicas de coordenadas angulares podem ser dados.

FENÔMENOS COM COMPORTAMENTO HARMÔNICOS E FUNÇÕES TRANSCEDENTES ELEMENTARES

Definição de FUNÇÕES HARMÔNICAS

KAPLAN-pág.128

Se $f=f(x,y)$ possuir derivas segundas contínuas num domínio $\boldsymbol{D}$ e se

$$\vec{\nabla}^2 z = 0 \quad \text{onde} \quad \vec{\nabla}^2 = \vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla} = \frac{\partial^2}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2}{\partial^2 y} + \frac{\partial^2}{\partial^2 z}$$

em $\boldsymbol{D}$, então z é chamada *harmônica* em D. O mesmo termo é usado para uma função de três variáveis que possui derivadas segundas contínuas num domínio D no espaço e cujo laplaciano é 0 em D. As duas equações que caracterizam as funções harmônicas:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2 z}{\partial^2 y} = 0 \ , \ \frac{\partial^2 w}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2 w}{\partial^2 y} + \frac{\partial^2 w}{\partial^2 z} = 0 \ ,$$

são chamadas *equações de Laplace* em duas e três dimensões, respectivamente.

USOS DAS FUNÇÕES HARMÔNICAS

KAPLAN-pág.129

As funções harmônicas surgem na teoria dos campos eletromagnéticos, na dinâmica dos fluidos, na teoria da condução do calor, e em muitas outras partes da física; algumas aplicações serão discutidas nos Caps. 5, 9 e 10. As funções bi-harmônicas são usadas sobretudo em elasticidade; elas serão discutidas nos Caps. 9 e 10.

(comentários)

Muitos dos fenômenos da natureza possuem oscilações no tempo (periódicos) e podem ser representadas por funções harmônicas.

As funções harmônicas formadas por composição de senos, co-senos e polimônios são chamadas de “funções elementares”, pois são formadas a partir das funções transcedentes elementares, conforme explicado a seguir:

KAPLAN-pag.18

AS FUNÇÕES TRANSCEDENTES ELEMENTARES:

As funções senx, cosx e e^x (onde e=2,71828...) e suas inversas costuma-se dar o nome de *FUNÇÕES TRANSCEDENTES ELEMENTARES*.

As funções que são obtidas a partir dessas últimas e de polinômios, por meio de um número finito de aplicações das operações aritméticas, de potenciação e de substituições (composição de funções), recebem o nome de FUNÇÕES ELEMENTARES.

Por exemplo: $y = \log e\left(1+\sqrt{1-x^2\cos x}\right)$

KAPLAN-pag. 22

CÁLCULO DIFERENCIAL PARA FUNÇÕES TRANSCEDENTES ELEMENTARES:

Quanto às funções transcedentes elementares, valem:

(0-101) $(\operatorname{sen} x)' = \cos x$; $(\cos x)' = \operatorname{sen} x$; $(a^x)' = a^x \cdot \log_e a$; $(\log x)' = \dfrac{1}{\log_e a}\cdot\dfrac{1}{x}$

As regras para *senx* e *cosx* são conseqüências da relação

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\operatorname{sen}\Delta x}{\Delta x} = 1$$

que é válida quando os ângulos são medidos em radianos.

As regras para a^x e $\log_e a$ são conseqüências da relação:

$$\lim_{\Delta x\to 0}(1+\Delta x)^{\frac{1}{\Delta x}} = e = 2{,}7182818285 \qquad \text{(0-103)}$$

É natural em cálculo tomar ***e*** como base das funções exponenciais e logarítmicas. Então:

$$\left(e^x\right)' = e^x \; ; \; (\log x)' = \frac{1}{x} \qquad \text{com:} \qquad (\log x = \log_e x)$$

KAPLAN-pag.342

SEQUÊNCIAS INFINITAS:

Se a cada inteiro positivo n é associado um número s_n, diz-se que os números s_n formam uma *seqüência infinita*. Ordenam-se os números segundos seus índices:

$$s_1, s_2, s_3, \cdots, s_n, s_{n+1}, \cdots$$

Exemplos de seqüência são:

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \cdots, \frac{1}{2^n}, \cdots$$

$$2, \left(\frac{3}{2}\right)^2, \left(\frac{4}{3}\right)^2, \ldots, \left(\frac{n+1}{n}\right)^n, \ldots$$

$$1, 1+\frac{1}{2}, 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}, \cdots, 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}, \cdots$$

Suas regras de formação são:

$$s_n = \frac{1}{2^n}, \quad s_n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n, \quad s_n = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}.$$

KAPLAN-pág.343

Demonstra-se que as seqüências (6-1) e (6-2) convergem,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} = 0 \qquad \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \cdots, \frac{1}{2^n}, \cdots$$

$$\lim_{n\to\infty} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = e \qquad 2, \left(\frac{3}{2}\right)^2, \left(\frac{4}{3}\right)^2, \cdots, \left(\frac{n+1}{n}\right)^n, \cdots$$

KAPLAN-pág.356

SÉRIE HARMÔNICA

Teorema 15. A série harmônica de ordem p.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}=1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\cdots$$

converge se $p>1$ e diverge se $p\leq 1$.

Demonstração: O termo geral não converge para 0 (zero) quando $p\leq 0$; portanto, para $p\leq 0$, a série certamente diverge.

Para $p>0$, o critério da integral pode ser usado, tomando-se

$$f(x)=\frac{1}{x^p}$$

Seja agora $p\neq 1$.

Uma vez que : $\displaystyle\int_1^b \frac{1}{x^p}dx=\left.\frac{x^{-(p+1)}}{-p+1}\right|_1^b=\frac{-1}{(p-1)}\left[b^{-(p-1)}-1\right]=\frac{1}{p-1}\left[1-\frac{1}{b^{p-1}}\right]$

Temos: $\displaystyle\int_1^{\infty}\frac{1}{x^p}dx=\lim_{b\to\infty}\left[\frac{1}{p-1}\left(1-\frac{1}{b^{p-1}}\right)\right]$

Para $p>1\Rightarrow \lim=\dfrac{1}{(p-1)}$

Para $p=1\Rightarrow \displaystyle\int_1^{\infty}\frac{1}{x}dx=\lim_{b\to\infty}\log b=\infty$

$$\therefore\ p=1\Rightarrow diverge\Rightarrow \underbrace{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots}_{\textbf{serie\_harmonica}}$$

KAPLAN-pág.362

Calcular $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{n!}$ $\quad a_n=\dfrac{n^n}{n!}$ $\quad$ CRITÉRIO DA RAZÃO$\Rightarrow\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}\frac{n!}{n^n}=\underbrace{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}_{e}=e\quad \text{(número de Euler)}$$

$e>1\Rightarrow$ série diverge$\Rightarrow$CRITÉRIO DO TERMO GERAL$\Rightarrow \displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n^n}{n!}=\infty$

Na verdade, podemos concluir desse resultado que

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^n}{n!}=\infty$$

ou seja, o termo geral tende ao infinito quando n tende ao infinito.

Definição de SÉRIES DE POTÊNCIA e RAIO DE CONVERGÊNCIA:

Continuar a partir do KAPLAN-pág.393.
...

CONSTRUÇÃO DA FUNÇÃO DO NÚMERO DE EULER
A PARTIR DAS SÉRIES DE MacLaurin e Taylor:

Após ter vistos alguns conceitos de seqüência e séries para seqüências específicas, veremos a seguir, como as seqüências e séries foram exploradas por Taylor e MacLaurin para construção de funções com características especiais.

A solução dessas funções é o números de Euler, que possui características especiais que permitiram um grande avança no tratamento analítico da matemática.

Desde então, inúmeros problemas da matemática e física puderam ser resolvidos.

Posteriormente será feito uma explicação mais detalhada a respeito.

KAPLAN-pág.399
DEFINIÇÃO DA SÉRIE DE Taylor:

Seja $f(x)$ a soma de uma série de potências cujo intervalo de convergência é $a-r^{*}<x<a+r^{*}$:

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(x-a)^n \quad \text{sendo } c_n=\frac{f^{n}(0)}{n!}$$

Essa série denomina-se a ***série de Taylor*** de $f(x)$ em $x=a$ se os coeficientes c_n forem dados pela regra:

$$c_0=f(a)\,,\quad c_1=\frac{f'(a)}{1!}\,,\ c_2=\frac{f''(a)}{2!}\,,\ c_3=\frac{f'''(a)}{3!}\,,\ \ldots,\ cn=\frac{f^{(n)}(a)}{n!}\,,\ldots;$$

temos então:

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\cdots\ .$$

KAPLAN-pág.400
DEFINIÇÃO DA SÉRIE DE MacLaurin:

E série de MacLaurin é um caso particular da série de Taylor para $a=0$. Ou seja:

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}(x)+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots$$

Por diversos motivos, a manipulação dessa série é mais simples. A substituição de $t=x-a$ reduz a série de Taylor geral à forma de uma série de MacLaurin.

KAPLAN-pág.401
Exercício 5: Seja $y=f(x)$ uma função (caso exista) tal que $f(x)$ está definida para todo x, f(x) possui uma série de MacLaurin válida para todo x, $f(0)=1$, e $\frac{dy}{dx}=y$ para todo x.

Mostrar que temos, necessariamente,

$$f(x)=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots\frac{x^n}{n!}+\cdots$$

e que satisfaça a todas as condição colocadas.

OBSERVAÇÃO: A função acima é a expansão por série do número de Euler!

Resolução:

Primeiramente, enumeremos as condições colocadas para a função:

I.	$f(x)$ possui um série de MacLaurin válida para todo x.
II.	$f(0)=1$
III.	$\frac{dy}{dx}=y$
IV.	$f(x)=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots$

Expandindo a função para melhor visualização, temos:

$$f(x)=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^5}{5!}+\frac{x^6}{6!}+\frac{x^7}{7!}+\cdots\frac{x^n}{n!}+\cdots$$

Agora resolvendo a primeira condição: **I. *f(x)* possui um série de MacLaurin válida para todo *x*.**

$f(x)$ para $x=0 \Rightarrow f(0)=1$

$$f'(x)=1+2\frac{x^1}{2!}+3\frac{x^2}{3!}+4\frac{x^3}{4!}+\cdots+n\frac{x^{n-1}}{n!}+\cdots$$

$$f''(x)=\frac{2}{2!}+3\cdot 2\frac{x}{3!}+4\cdot 3\frac{x^3}{4!}+\cdots+n(n-1)\frac{x^{n-2}}{n!}+\cdots$$

$$f'''(x)=\frac{3\cdot 2\cdot 1}{3!}+4\cdot 3\cdot 2\frac{x}{3!}+4\cdot 3\frac{x^2}{4!}+\cdots+n(n-1)(n-2)\frac{x^{n-3}}{n!}+\cdots$$

$$f^{(IV)}(x)=\frac{4\cdot 3\cdot 2}{4!}+\cdots+n(n-1)(n-2)(n-3)\frac{x^{n-4}}{n!}+\cdots$$

$\vdots$

Portanto, para

$f'(x)$	para x=0 $\Rightarrow f'(0)=1$;
$f''(x)$	para x=0 $\Rightarrow f''(0)=1$;
$f'''(x)$	para x=0 $\Rightarrow f'''(0)=1$;
$f^{(IV)}(x)$	para x=0 $\Rightarrow f^{(IV)}(0)=1$;
$\vdots$	
$f^{(n)}(x)$	para x=0 $\Rightarrow f^{(n)}(0)=1$.

Portanto, para qualquer que seja n, $f^{(n)}(0)=1$

o que implica que $c_n=\dfrac{f^{n}(0)}{n!}=\dfrac{1}{n}$

Em notação matemática: $\therefore \forall n \Rightarrow f^{(n)}(0)=1 \Rightarrow c_n=\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}=\dfrac{1}{n!}$

Para valer a série de MacLaurin para qualquer x pela definição o seu “raio de convergência” r^* deve ser infinito, ou seja, $r^*=\infty$

Pela definição de raio de convergência:

$$r^*=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{n!}=\lim_{n\to\infty}(n+1)=\infty$$

Portanto, a série converge absolutamente para todo x conforme Teorema 35 – KAPLAN-pág.394 Item (6-38).

Resolvendo a segunda condição: **II. *f(0)=1*.**

A provar é imediata, bastando substituir *x=0* em *f(x)*. O que já foi feito no item anterior!

Resolvendo a terceira condição: **III.** $\dfrac{dy}{dx}=y$ **;** *y=f(x)***.**

$$\frac{df(x)}{dx}=f'(x)=f(x)$$

Verificando :

$$f(x)=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^5}{5!}+\frac{x^6}{6!}+\frac{x^7}{7!}+\frac{x^8}{8!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots$$

$$f'(x) = 1 + 2\frac{x^1}{2!} + 3\frac{x^2}{3!} + 4\frac{x^3}{4!} + 5\frac{x^4}{5!} + 6\frac{x^5}{5!} + 7\frac{x^7}{7!} + \cdots + n\frac{x^{n-1}}{n!} + \cdots$$

$$f'(x) = \underbrace{1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^7}{7!} + \cdots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{x^n}{n!} + \cdots}_{f(x)}$$

Portanto, $f'(x) = f(x)$

COMENTÁRIOS SOBRE A RESOLUÇÃO DA SÉRIE DE TAYLOR PARA O NÚMERO DE EULER:

A característica que permite que $f'(x) = f(x)$ está baseada nos seguintes fatos:

- definição dos números fatoriais $\boldsymbol{n!}$;
- derivação de $x^n = (n-1)x^{n-1}$ que permite que o resultado seja reduzido em uma ordem e multiplicado pelo número da última ordem;
- os termos c_n na série de Taylor serem sempre 1, logo, cada termo da série é definido por: $a_n = \dfrac{x^n}{n!}$;

Portanto, sempre que se derivar a função, cada termo da série de potências ficará uma ordem menor e iguala-se com o correspondente termos na função de ordem imediatamente anterior, logo: $f'(x) = f(x)$.

A função demonstrada é o número de Euler.
Provavelmente, este número foi definido por Euler devido a sua característica própria de que $f'(x) = f(x)$ que permite a solução de inúmeros problemas matemáticos principalmente:

- derivação e integração;
- substituição (composição de funções), tais como as séries de Forrier;
- etc.

De fato, na solução de equações da Teoria física do Eletromagnetismo, por exemplo, o número de Euler será empregado intensamente através da "Identidade de Euler", que será demonstrada posteriormente.

KAPLAN-pág.454
(7-6) **OBSERVAÇÕES SOBRE APLICAÇÕES DAS SÉRIES E FORIER.**

O campo natural de aplicações das séries de Fourier é a de fenômenos periódicos, como se indicou na Séc.7-1. O fato de uma função periódica poder ser decomposta em suas componentes harmônicas simples $A_n = \mathrm{sen}(nt + \ {}_n)$ é de significado físico fundamental. Para todos os problemas "lineares", essa resolução permite reduzir o problema a problemas mais simples de uma única vibração harmônica simples e depois construir o caso geral por adição (superposição) de simples.

A aplicação concreta das séries de Fourier a tais problemas toma duas formas fundamentais: uma função periódica $f(t)$ pode ser dada em forma gráfica ou tabelada; uma compreensão melhor do mecanismo físico que levou a tal função exige uma "análise harmônica" de $f(t)$, ou seja, representação de $f(t)$ como série de Fourier. Segundo, sabe-se que a função $f(t)$ é periódica e sabe-se que ela satisfaz a uma relação, por exemplo a uma equação diferencial; deseja-se determinar $f(t)$ como uma série de Fourier com base nessa informação.

O primeiro problema é de ***interpretação*** de dados experimentais; o segundo problema é de ***predição*** do resultado de uma experiência, com base numa teoria matemática.

Sendo a aplicação das séries de Fourier a fenômenos periódicos fundamental há um campo de aplicação muito mais vasto. Como se demonstrou acima, uma função "arbitrária" $f(x)$, dada para $a \leq x \leq b$, tem uma representação como série de Fourier sobre esse intervalo. Assim, em qualquer problema relativo a uma função num intervalo pode ser vantajoso representar a função pela série correspondente. Isso permite uma enorme variedade de aplicações. Como antes, as aplicações tomam, em geral, a forma ou interpretação de certos dados, ou de predição funções que satisfaçam às condições dadas.

KAPLAN-pág.402

FÓRMULA DE TAYLOR COM RESTO.

A discussão acima (das séries de Taylor e de MacLaurin) concentrou-se mais nas séries de potências que nas funções que elas representam. A posição inversa é, também, de grande importância, e a primeira pergunta que se coloca é esta: dada uma função $f(x)$, com $a < x < b$ se , pode essa função ser representada por uma série de potências nesse intervalo? Quando $f(x)$ é suscetível de tal representação, diz-se que $f(x)$ é analítica no intervalo dado. De modo mais geral, $f(x)$ é chamada analítica em $a < x < b$, se para cada x_0 desse intervalo, f(x) pode ser representada por uma série de potências em algum intervalo $x_0 - \quad < x_0 < x_0 + \quad$. A maior parte das funções familiares (polinômios, funções racionais, e^x, $sen\, x$, $cos\, x$, $log\, x$, $\sqrt{x}$), e as funções constituídas a partir delas por operações algébricas e substituições são analíticas em todo intervalo onde a função examinada é contínua. As exceções não são muito difíceis de reconhecer. Por exemplo, $\sqrt{x^2} = |x|$ é contínua para todo x, mas possui uma derivada descontínua em $x=0$. Então a função não pode ser analítica num intervalo contendo esse valor.

É possível desenvolver facilmente uma teoria satisfatória de funções analíticas usando-se variáveis complexas.

Contudo, o teorema que segue é bastante útil para estabelecer a analiticidade de uma função, sem apelo para números complexos.

Teoremo 41. (Fórmula de Taylor com resto). Seja *f(x)* uma função.....

.....terminar!!!!

KAPLAN-pág.404

$$f(x) = e^x$$

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(x1)}{(n+1)!}(x-a)^{(n+1)}$$

$$R_n = \frac{e^{x1}x^{n+1}}{(n+1)!}$$ para $a=0$ e $x>0$;

$$0 < R_n < \frac{e^x x^{n+1}}{(n+1)!}$$

R_n é menor que ou inferior ao *n-ésimo* termo da série.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^x x^{n+1}}{(n-1)!}$$

pelo critério da razão:

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{\cancel{e^x}\,(x)^{n+2}}{n\,\cancel{(n-1)!}}\,\frac{\cancel{(n-1)!}}{\cancel{e^x}\,(x)^{n+1}} = \frac{(x)^{\cancel{n}+2-\cancel{n}-1}}{n} = \frac{x}{n}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{x}{n} = 0 \Rightarrow$$ converge para qualquer que seja o x.

PELO CRITÉRIO DO TERMO GERAL $\lim_{n\to\infty}\frac{e^x x^{n+1}}{(n+1)!} = 0$

$$\therefore\ R_n = 0$$

Também vale o argumento para $x<0$.

Portanto, e^x pode ser representado por uma série de Taylor.

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} \qquad \forall x \qquad \text{(6-46)}$$

para qualquer que seja x.

(Vale lembrar que $0!=1$ por definição).

De modo análogo, pode-se provar que são válidas as seguintes expansões:

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \cdots, \qquad \text{(6-47)}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + \cdots$$ para todo x. (6-48)

$$(1+x)^m = 1 + \frac{m}{1!}x + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}x^n + \cdots$$, $-1<x<1$, para todo número real m. (6-49)

KAPLAN-pag.408

PRINCÍPIO RICO EM APLICAÇÕES.

Determinação de uma função que satisfaça uma dada condição.

- imponha que a função possa ser expressa por uma série de potências;
- procure determinar os coeficientes dessa série de modo tal que seja satisfeita a condição dada;
- se for possível encontrar uma série, pode-se examinar a convergência da série e averiguar se, de fato, ela define uma função que satisfaz à condição dada.

Comentários: Foi exatamente isso que foi feito ao utilizar a série de MacLaurin fez para determinar a função que satisfaça as condições iniciais e que definem o número de Euler.

Veremos mais adiante, com provar a "Identidade de Euler" que ajudará a resolver integrações e derivações de números complexos nas equações de eletromagnetismo.

SEQÜÊNCIAS E SÉRIES DE NÚMEROS COMPLEXOS PARA AS FUNÇÕES TRANSCEDENTES ELEMENTARES:

KAPLAN-pág.413

É particularmente interessante observar que as séries de potências (6-46),(6-47),(6-48) de e^x, $sen\ x$ e $cos\ x$ ainda convergem quando se substitui x por um número complexo arbitrário z, pois, assim, podemos usar as equações

$$e^z = 1 + z + \cdots + \frac{z^n}{n!} + \cdots, \qquad (6\text{-}57)$$

$$\operatorname{sen} z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{z^{2n-1}}{(2n-1)!} + \cdots, \qquad (6\text{-}58)$$

$$\cos z = z - \frac{z^2}{2!} + \cdots + (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \cdots \qquad (6\text{-}59)$$

para definir essas funções no caso complexo. A partir dessas séries, deduzimos a *identidade de Euler*:

$$e^{iy} = \cos y + i \operatorname{sen} y \qquad (6\text{-}60)$$

ou a relação mais geral

$$e^{x+iy} = e^{x}\left(\cos y + i \operatorname{sen} y\right) \qquad (6\text{-}61)$$

KAPLAN-pág..414 – Problemas 3 e 4.

3-Provar que as séries (6-57), (6-58) e (6-59) convergem para todo z.

$$e^z = 1 + z + \cdots + \frac{z^n}{n!} + \cdots, \qquad \text{(6-57)}$$

$$\operatorname{sen} z = z - \frac{z^3}{3!} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{z^{2n-1}}{(2n-1)!} + \cdots, \qquad \text{(6-58)}$$

$$\cos z = z - \frac{z^2}{2!} + \cdots + (-1)^{n}\frac{z^{2n}}{(2n)!} + \cdots \qquad \text{(6-59)}$$

Resolução:

Pelo critério da razão (KAPLAN-pág.357),

Para a série (6-57), temos:

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{z^{n+1}}{(n+1)\cdot \cancel{n!}}\frac{\cancel{n!}}{z^n} = \frac{z}{n+1} \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{z}{n+1} = 0 \Rightarrow$$ converge absolutamente para qualquer x. Converge absolutamente $\forall x$

Para a série (6-58), temos:

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{(-1)^{\cancel{n}} z^{\overbrace{\cancel{2n+1}}^{2}}}{(2n+1)(2n)\cancel{(2n-1)!}}\frac{\cancel{(2n-1)!}}{(-1)^{n-1}\cancel{z^{2n-1}}} = \frac{-z^2}{(2n+1)(2n)} = \frac{1}{n^2}\frac{-z^2}{\left(2+\frac{1}{n}\right)^2} \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \Rightarrow$$

$$\left\langle \begin{array}{l} 2n+1-2n+1=2 \\ n-n+1=1 \end{array}\right|$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\underbrace{\cancel{\frac{1}{n^2}}}_{\to 0}\frac{-z^2}{\left(2+\underbrace{\cancel{\frac{1}{n}}}_{\to 0}\right)^2} = 0$$

converge absolutamente para qualquer x. Converge absolutamente $\forall x$

Para a série (6-59), temos:

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{(-1)^{\cancel{n}+1} z^{\overbrace{\cancel{2n}+2}^{2}}}{(2n+2)(2n+1)\cancel{(2n)!}}\frac{\cancel{(2n)!}}{\cancel{(-1)^n}\cancel{z^{2n}}} = \frac{-z^2}{(2n+2)(2n+1)} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\frac{-z^2}{\left(2+\frac{2}{n}\right)^2} \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \Rightarrow$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\underbrace{\cancel{\frac{1}{n^2}}}_{\to 0}\frac{-z^2}{\left(2+\underbrace{\cancel{\frac{1}{n}}}_{\to 0}\right)\left(2+\underbrace{\cancel{\frac{1}{n}}}_{\to 0}\right)} = 0 \Rightarrow$$ converge absolutamente para qualquer x.

Converge absolutamente $\forall x$

KAPLAN-pág.414
Exercícios sobre IDENTIDADE DE EULER:

4-a) Estabelecer a IDENTIDADE DE EULER (6-60) a partir da definição de e^x , *sen x e cos x* por série.

$$e^{iy} = \cos y + i \operatorname{sen} y \qquad (6\text{-}60)$$

4-b) Estabelcer a relação (6-61) a partir da definição de e^x , *sen x e cos x* por série.

$$e^{x+iy} = e^x\left(\cos y + i \operatorname{sen} y\right) \qquad (6\text{-}61)$$

Resolução:
4-a)

$$\cos y = 1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} - \frac{y^6}{6!} + \frac{y^8}{8!} - \frac{y^{10}}{10!} + \frac{y^{12}}{12!} + \cdots + \frac{(-1)^n y^{2n}}{(2n)!} + \cdots \text{ para todo } x.$$

$$\operatorname{sen} y = y - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{y^{2n-1}}{(2n-1)!} + \cdots, \qquad \text{para todo } x.$$

$$i \cdot \operatorname{sen} y = i \cdot y - i\frac{y^3}{3!} + i\frac{y^5}{5!} + \cdots + i(-1)^{n+1}\frac{y^{2n-1}}{(2n-1)!} + \cdots$$

$$e^{iy} = 1 + i \cdot y + \frac{(iy)^2}{2!} + \frac{(iy)^3}{3!} + \frac{(iy)^4}{4!} + \frac{(iy)^5}{5!} + \frac{(iy)^6}{6!} + \cdots + \frac{i^n y^n}{n!} + \cdots$$

$$e^{iy} = 1 + i \cdot y - \frac{y^2}{2!} - \frac{iy^3}{3!} + \frac{y^4}{4!} + \frac{iy^5}{5!} - \frac{y^6}{6!} - \frac{iy^7}{7!} + \frac{y^8}{8!} + \frac{iy^9}{9!} + \cdots + \frac{i^n y^n}{n!} + \cdots$$

$$e^{iy} = 1 \underbrace{+ i \cdot y} - \frac{y^2}{2!} \underbrace{- \frac{iy^3}{3!}} + \frac{y^4}{4!} \underbrace{+ \frac{iy^5}{5!}} - \frac{y^6}{6!} \underbrace{- \frac{iy^7}{7!}} + \frac{y^8}{8!} \underbrace{+ \frac{iy^9}{9!}} + \cdots + \frac{i^n y^n}{n!} + \cdots$$

$$e^{iy} = \cos y + i \operatorname{sen} y$$

A expressão de série de potências é uma conseqüência dessa definição de e^z complexo para z complexos.

4-b)

$$e^{x+iy} = e^x \cdot \underbrace{e^{iy}}_{\cos y + i \operatorname{sen} y} = e^x\left(\cos y + i \operatorname{sen} y\right)$$

Exercícios complementares relacionados com a demonstração da Identidade de Euler

KAPLAN-pág.414 – Problema 5.

5-Usando as expressões (6-57), (-58), (6-59), provar as identidades:

a) $\cos z = \dfrac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$; b) $\operatorname{sen} z = \dfrac{e^{iz}-e^{-iz}}{2\,i}$; c) $e^{z_1+z_2} = e^{z_1}\cdot e^{z_2}$;

d) $\operatorname{sen}(-z) = -\operatorname{sen} z$; e) $\cos(-z) = \cos z$; f) $\operatorname{sen}^2 z + \cos^2 z = 1$;

g) $\cos 2z = \cos^2 z - \operatorname{sen}^2 z$; h) $\operatorname{sen} 2z = 2\operatorname{sen} z \cdot \cos z$

Dado:

$$e^z = 1 + z + \cdots + \frac{z^n}{n!} + \cdots, \qquad \text{(6-57)}$$

$$\operatorname{sen} z = z - \frac{z^3}{3!} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{z^{2n-1}}{(2n-1)!} + \cdots, \qquad \text{(6-58)}$$

$$\cos z = z - \frac{z^2}{2!} + \cdots + (-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n)!} + \cdots \qquad \text{(6-59)}$$

Resolução:

a)

$$e^{iz} = 1 + \cancel{i\cdot z} + \frac{z^2}{2!} + \cancel{\frac{i\cdot z^3}{3!}} + \frac{z^4}{4!} + \cancel{\frac{i\cdot z^5}{5!}} - \frac{z^6}{6!} + \cancel{\frac{i\cdot z^7}{7!}} + \frac{z^8}{8!} + \quad \cdots + \frac{i^n z^n}{n!} + \cdots$$

$$+ \qquad + \qquad + \qquad + \qquad + \qquad + \qquad +$$

$$e^{-iz} = 1 \cancel{-i\cdot z} - \frac{z^2}{2!} + \cancel{\frac{iz^3}{3!}} + \frac{z^4}{4!} - \cancel{\frac{iz^5}{5!}} - \frac{z^6}{6!} + \cancel{\frac{iz^7}{7!}} + \frac{z^8}{8!} + \cancel{\frac{iz^9}{9!}} + \cdots + \underbrace{\frac{(-i\cdot z)^n}{n!}}_{\substack{os\ \ impares \\ anulam-se!}} + \cdots$$

$$(i\cdot z)^{2n} = \left(i^2\cdot z^2\right)^n = (-1)^n \cdot z^{2n}$$

$$= 2\left[\underbrace{1 \quad -\frac{z^2}{2!} + \quad \frac{z^4}{4!} \quad -\frac{z^6}{6!} \quad + \frac{z^8}{8!} + \quad \cdots + \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!} + \cdots}_{\cos z}\right]$$

$$\therefore \quad \cos z = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2} \qquad \text{C.Q.D.}$$

b) $$e^{iz} = \cancel{1} + i\cdot z - \cancel{\frac{z^2}{2!}} - \frac{i\cdot z^3}{3!} + \cancel{\frac{z^4}{4!}} + \frac{i\cdot z^5}{5!} - \cancel{\frac{z^6}{6!}} - \frac{i\cdot z^7}{7!} + \cancel{\frac{z^8}{8!}} + \frac{i\cdot z^9}{9!} + \cdots + \frac{i^n\cdot z^n}{n!} + \cdots$$

$$-e^{(-iz)} = -\cancel{1} + i\cdot z + \cancel{\frac{z^2}{2!}} - \frac{i\cdot z^3}{3!} - \cancel{\frac{z^4}{4!}} + \frac{i\cdot z^5}{5!} + \cancel{\frac{z^6}{6!}} - \frac{i\cdot z^7}{7!} - \cancel{\frac{z^8}{8!}} + \frac{i\cdot z^9}{9!} \cdots - \underbrace{\frac{(i\cdot z)^n}{n!}}_{\substack{os\ \ pares\\ anulam-se!}} + \cdots$$

$$= 2\cdot i\left[\underbrace{z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \frac{z^9}{9!} \cdots + \frac{(-1)^{n-1} z^{2n-1}}{(2n-1)!} + \cdots}_{\operatorname{sen} z}\right]$$

$$\therefore \quad \operatorname{sen} z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2\,i}$$

C.Q.D.