Matthias-Claudius-Gymnasium Gehrden

Facharbeit

Leistungskurs Mathematik Nr. 315

Komplexe Zahlen

Verfasser:

Robert Ciesnik
Haydar Kayapinar
Philipp Treiber

Abgabetermin: 12. April 2000

Fachlehrerin: Frau Ulrike Luckow

Inhaltsübersicht

Vorwort

In der vorliegenden Facharbeit wird der Versuch unternommen, die komplexen Zahlen, sowie Rechenoperationen und einige Anwendungsgebiete allgemeinverständlich darzustellen. Die angewendeten Methoden erforderten, dass wir uns zuerst mit Themenbereichen auseinandersetzten, um Sachverhalte nachvollziehen zu können, die im Bereich der reellen Zahlen völlig selbstverständlich zu sein scheinen (Axiome, etc.). Darüber hinaus mussten wir uns in einem Bereich zurechtfinden, der für uns erst völlig unvorstellbar schien, weil wir in unserer mathematischen Erziehung bis zum heutigen Zeitpunkt eines anderen belehrt worden waren. Zahlen, die beispielsweise keine Anordnung haben, hielten wir erst für überflüssig und später für interessant, bis es Normalität wurde, mit komplexen Zahlen zu rechnen und mit ihnen umzugehen.
Die Aufgabe der Informationsbeschaffung viel uns weniger schwer, da es viel Literatur und andere Informationsquellen zu diesem Thema gibt. Die Schwierigkeit lag vielmehr darin sich auf das Heraussuchen der für uns wichtigsten Informationen zu beschränken und das Verständnis für einen völlig neuen Zahlenbereich aufzubringen.
Die Themenbereiche unserer Facharbeit haben wir unter Berücksichtigung der aufgeführten Verständnisproblematik mit besonderem Schwerpunkt auf die Grundlagen und bereits bekannte Verfahren aus dem Bereich der reellen Zahlen ausgewählt.
Die Arbeitsteilung haben wir nach Themen vorgenommen, indem wir je nach Wichtigkeit und Verständlichkeit eines Themas die Anzahl der benötigten Seiten abgeschätzt haben. So hat jeder von uns jeweils ein Schwerpunktthema und ein Grundlagenthema bearbeitet.

Robert Ciesnik, Haydar Kayapinar, Philipp Treiber im April 2000

I. Grundlagen[1] (Robert)

I.1. Gruppenbegriff

Während der gesamten Schulzeit wurden Jahr für Jahr neue Methoden und Bereiche der Mathematik gelehrt. Auch der Begriff der *Menge* wurde über die Schuljahre immer wieder erweitert, wenn man an dessen Grenzen angelangt ist. So wurde als erstes die Menge der *natürlichen Zahlen* $\mathbb{N}$ eingeführt. Mit den Zahlen aus dieser Menge konnte man einfache Summen, Differenzen, später Produkte und Quotienten berechnen, die als Lösung immer nur eine Zahl aus der gegebenen Menge ergaben. Doch bereits bei den Differenzen tauchten Zahlen mit einem negativen Vorzeichen auf, die nicht in der Menge der *natürlichen Zahlen* definiert sind. Also wurde die Menge der *ganzen Zahlen* $\mathbb{Z}$ eingeführt. Doch auch diese Menge war für viele Ergebnisse aus Divisionen, also vor allem Brüche, nicht definiert und ihr folgte die Menge der *rationalen Zahlen* $\mathbb{Q}$. Mit der Einführung der Wurzel bekam man Ergebnisse, die man nicht als Bruch darstellen konnte. Es waren sogenannte *irrationale Zahlen* (z.B. $\sqrt{2}$). Die rationalen Zahlen und die irrationalen Zahlen bilden zusammen die Menge der *reellen Zahlen* $\mathbb{R}$. Inzwischen rechnet man in der Oberstufe sogar mit Objekten, wie Vektoren und Funktionen.

Doch was bei all diesen Erweiterungen immer geblieben ist, das sind die Voraussetzungen, die zum Rechnen geschaffen werden müssen. Das bedeutet man braucht immer eine *Grundmenge* G, zwei Elemente für die gilt $a,b \in G$ und eine Rechenoperation (im Folgenden "Verknüpfung $\circ$" genannt), die ein *eindeutig definiertes* Ergebnis liefert, welches unter $a \circ b$ zu verstehen ist.

Ferner haben Grundmengen und Verknüpfungen, deren Elemente aus der Grundmenge definiert sind eine oder mehrere der folgenden Eigenschaften:

1. *Abgeschlossenheit*
   Für alle $a,b \in G$ ist $a \circ b \in G$.
2. *Assoziativität*
   Für alle $a,b,c \in G$ ist $a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c$.
3. *Existenz eines neutralen Elementes*
   Es gibt ein $n \in G$, so dass $n \circ a = a \circ n = a$ für alle $a \in G$ gilt.

[1] Ltv.: 1,S. 9-16

Beispiel: Bei der Addition ist die Zahl 0 das neutrale Element und bei der Multiplikation die Zahl 1.

4. *Existenz von inversen Elementen*

   Zu jedem $a \in$ G gibt es genau ein Inverses a^{-1}, so dass $a^{-1} \circ a = a \circ a^{-1} = n$ gilt.

   Beispiel: $a + (-a) = (-a) + a = 0$.

Diese Eigenschaften einer Gruppe heißen *Gruppenaxiome*.

Es gibt noch eine fünfte Eigenschaft, die *Kommutativität*, jedoch wird sie, laut Dittmann, nicht zu den Gruppenaxiomen gezählt, weil sie den allgemeinen Gruppenbegriff, der dazu dient Gemeinsamkeiten verschiedener mathematischer Objekte herauszustellen, zu sehr einschränken würde.

I.2. Körperaxiome der reellen Zahlen ℝ

Als *Körper* definiert man eine Grundmenge K, die mindestens 2 Elemente besitzt, auf ihr 2 Verknüpfungen + (Addition) und · (Multiplikation) definiert sind und folgende *Körperaxiome* erfüllt sind:

1. *Abgeschlossenheit:* K ist bezüglich beider Verknüpfungen abgeschlossen.
2. *Assoziativität:* Für alle $a,b,c \in K$ gilt $a + (b + c) = (a + b) + c$ und $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$.
3. *Existenz der neutralen Elemente:* Bei beiden Verknüpfungen existiert ein neutrales Element; bei der Addition ist es die Zahl 0 und bei der Multiplikation die Zahl 1.
4. *Existenz der inversen Elemente:* Bei der Addition ist -a das inverse Element zu a und bei der Multiplikation ist es a^{-1}.
5. *Kommutativität:* Für alle $a,b \in K$ gilt $a + b = b + a$ und $a \cdot b = b \cdot a$.
6. *Distributivität:* Für alle $a,b,c \in K$ gilt $a(b + c) = ab + ac$.

I.3. Anordnungsaxiome

Neben den Körperaxiomen gibt es ebenfalls Axiome, mit dessen Hilfe man Aussagen über die Anordnung von Zahlen auf einer Zahlengeraden treffen kann. Wenn die folgenden Axiome gelten, dann heißt der Körper K *angeordnet:*

1. *Trichotomie:* Für alle $a,b \in K$ gilt nur eine der 3 Relationen: $a > b$, $a = b$, $a < b$.
2. *Transitivität:* Wenn $a > b$ und $b > c$ dann ist $a > c$.
3. *Monotonie der Addition:* Wenn $a > b$ dann ist für jedes c auch $a + c > b + c$.
4. *Monotonie der Multiplikation:* Wenn $a > b$ und $c > 0$ dann ist $a \cdot c > b \cdot c$.

Durch Anwendung dieser Axiome auf den Körper der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ darf man sagen, dass der Körper der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ *angeordnet* ist.

II. Der Körper der komplexen Zahlen[2] (Philipp)

II.1. Der Mangel des Körpers der reellen Zahlen

Lineare Gleichungen der Form $ax+b=0$ (mit $a,b\in \mathbb{R}$ und $a\neq 0$) haben immer eine Lösung.

Anders ist es bei quadratischen Gleichungen der Form $ax^2+bx+c=0$. Hier gibt es welche, die in $\mathbb{R}$ eine Lösung haben, aber auch welche, die keine Lösung in $\mathbb{R}$ haben. Die Gleichung $x^2=-1$ hat zum Beispiel in $\mathbb{R}$ keine Lösung, weil Quadrate reeller Zahlen nicht negativ sein können.

Nun haben aber auch Gleichungen der Form $5x=4$ in $\mathbb{Z}$ oder $x^2=2$ in $\mathbb{Q}$ keine Lösung. Erst die Erweiterung zu $\mathbb{Q}$ bzw. $\mathbb{R}$ machte Gleichungen solcher Form lösbar.

II.2. Erweiterung des Körpers der reellen Zahlen

Also muss der Körper der reellen Zahlen erweitert werden, damit quadratische Gleichungen der Form $x^2=-1$ eine Lösung erhalten.

Einer der ersten Mathematiker, der sich mit diesem Problem auseinandersetzte, war Leonard Euler (1707-1783). Er führte eine neue „Zahl“ ein, die die Lösung der Gleichung $x^2=-1$ haben sollte. Für diese Zahl sollte also gelten :

$i^2=-1$

Die Zahl *i* wird als imaginäre Einheit betrachtet. Dieser Name geht schon auf René Descartes (1596- 1650) zurück. Durch Multiplikation einer reellen Zahl mit *i*, kommt es zu den Imaginärzahlen *bi*, mit denen so gerechnet wird, als sei *i* eine durch einen Buchstaben zu vertretene Zahl:

$6i-3i=3i$;

$0i=0$; $1i=i$; $-1i=-i$;

$5i\cdot 2i=(5\cdot 2)i^2=10(-1)=-10.$

Durch die Einführung der Imaginärzahlen erhalten alle rein quadratischen Gleichungen der Form $x^2=-a$ (mit $a>0$) eine Lösung. Die Lösungen sind $x_1=+i\sqrt{a}$ und $x_2=-i\sqrt{a}$.

[2] Ltv.: 1, S. 20-28

Denn es gilt :

$$\left(i\sqrt{a}\right)^2 = i^2\left(\sqrt{a}\right)^2 = (-1)a = -a$$

$$\left(-i\sqrt{a}\right)^2 = (-i)^2\left(\sqrt{a}\right)^2 = (-1)a = -a\,.$$

Gemischte quadratische Gleichungen haben Summen aus reellen und imaginären Zahlen als Lösung. Zahlen, die aus einem reellen und einem imaginären Anteil additiv zusammengesetzt werden, heißen *komplex*. Sie haben die Form

$$z = a + bi \qquad a, b \in \mathbb{R}.$$

Summen und Produkte komplexer Zahlen lassen sich folgendermaßen berechnen:

$$z_1 + z_2 = (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$

$$z_1 \cdot z_2 = (a + bi)\cdot(c + di) = ac + adi + bci + bdi^2 = (ac - bd) + (ad + bc)i\,.$$

II.3. Kritik am Vorgehen

Zuerst wurde festgestellt, dass es keine reelle Zahl gibt, deren Quadrat negativ ist. Jetzt ist einfach diese Zahl eingeführt worden, ohne zu wissen, ob es nicht auf Widersprüche stößt, wenn doch eine solche „Zahl" grundsätzlich nicht existieren kann. Diese Problemstellung kann an folgendem Beispiel verdeutlicht werden:

Es gibt in $\mathbb{R}$ kein Inverses der 0 bezüglich zu der Multiplikation 0^{-1}. Man könnte ja genau wie *i* eine Zahl *j* einfügen, die das Inverse zu 0 ist. Dann wäre $j = 0^{-1}$ oder $0j = 1$.

Dann wäre $(0 + 0)j = 0j = 1$,

wegen der Distributivität aber auch $(0 + 0)j = 0j + 0j = 1 + 1 = 2$. Es würde also $1 = 2!$ sein.

Es kann also auf Widersprüche stoßen, wenn man ein nichtexistierendes Objekt durch die Namengebung in die Existenz hebt.

II.4. Konstruktion von komplexen Zahlen

Weil man an der Existenz der Zahl *i* zweifeln könnte, kann man neben der schon bekannten Summenschreibweise auch komplexe Zahlen als ein Paar von reellen Zahlen darstellen, bei dem es auf die Reihenfolge ankommt. Die Existenz von solchen Paaren reeller Zahlen kann grundsätzlich keine Zweifel aufwerfen.

Also ist eine komplexe Zahl als ein geordnetes Paar reeller Zahlen (a;b) definiert. Die erste Zahl des Paares (a) heißt Realteil, der zweite Teil des Paares (b) heißt Imaginärteil oder abgekürzt: $z = (a;b) \quad a = \mathrm{Re}(z) \quad b = \mathrm{Im}(z)$

Zwei komplexe Zahlen sind gleich, wenn ihr Realteil und ihr Imaginärteil übereinstimmen. Jetzt wurde eine neue Zahlenmenge eingeführt. Es ist die Menge der komplexen Zahlen $\mathbb{C}$. An dieser neuen Zahlenmenge werden die Grundverknüpfungen der Addition und der Multiplikation neu definiert, und zwar so, dass die Permanenz der Rechengesetze weiter in $\mathbb{C}$ bestehen bleibt. Die Ergebnisse aus der Summenschreibweise werden analog übertragen.
Es ist

$$z_1 + z_2 = (a;b) + (c;d) = (a+c; b+d)$$

$$z_1 \cdot z_2 = (a;b) \cdot (c;d) = (ac - bd; ad + bc).$$

Auf diese Weise werden alle Zahlen, deren Imaginärteil 0 ist, addiert bzw. multipliziert; man rechnet mit ihren Realteilen.

$(5;0) + (3;0) = (5+3;0) = (8;0)$ $\qquad$ $(3;0) \cdot (2;0) = (3 \cdot 2;0) = (6;0)$

Also kann die Paarschreibweise, auch als eine andere Schreibweise der reellen Zahlen verwendet werden, wenn der Imaginärteil 0 ist. Daher gilt $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$. Die Menge $\mathbb{C}$ ist eine Erweiterung von $\mathbb{R}$.

Komplexe Zahlen, deren Realteil 0 ist, bilden keine abgeschlossene Teilmenge. Es ist $(0;1) * (0;1) = (0-1; 0*1+1*0) = (-1;0) = -1$, was nur eine andere Schreibweise für $i^2 = -1$ wäre. Also ist $(0;1) = i$ und $(0;b) = bi$, was die Gleichwertigkeit von Summenschreibweise und Paarschreibweise zeigt.

II.5. Die Menge $\mathbb{C}$ als Körper

Um die Menge $\mathbb{C}$ auch als Körper bezeichnen zu können, muss bewiesen werden, dass die Körperaxiome beibehalten werden (Permanenz der Rechengesetze).
Die Menge $\mathbb{C}$ ist bezüglich den Grundverknüpfungen der Addition und Multiplikation abgeschlossen. Auch Assoziativität, Kommutativität und Distributivität behalten ihre Gültigkeit.
Das Inverse bezüglich der Addition ist $0 + 0i = 0$. Die Kommutativität und die Assoziativität lässt sich leicht erkennen, weil sie auf die Addition von Real- bzw. Imaginärteil zurückzuführen ist.
Die Distributivität lässt sich zeigen, indem man beide Seiten der Gleichungen getrennt ausrechnet: $(a_1 + b_1 i)[(a_2 + b_2 i) + (a_3 + b_3 i)] = (a_1 + b_1 i)(a_2 + b_2 i) + (a_1 + b_1 i)(a_3 + b_3 i)$.
Für beide Seiten erhält man dann $a_1 a_2 + a_1 a_3 + a_1 b_2 i + a_1 b_3 i + a_2 b_1 i + a_3 b_1 i - b_1 b_2 - b_1 b_3$.

Die Assoziativität bezüglich der Multiplikation lässt sich mit der Polarform (siehe Kapitel IV) leichter beweisen. Ein Beweis mit der Summenschreibweise ist auch möglich, jedoch gibt es hier sehr viel mehr Rechenarbeit zu leisten. Es werden auch beide Seiten getrennt von einander berechnet. Es ist :

$$|r_1|E(\varphi_1) * \left[|r_2|E(\varphi_2) * |r_3|E(\varphi_3)\right] = \left[|r_1|E(\varphi_1) * |r_2|E(\varphi_2)\right] * |r_3|E(\varphi_3)$$

$$|r_1 r_2 r_3| E(\phi_1 + \phi_2 + \phi_3) = |r_1 r_2 r_3| E(\phi_1 + \phi_2 + \phi_3).$$

Die Körperaxiome verlangen aber auch ein neutrales Element 1 und zu jeder Zahl ein Inverses bezüglich der Multiplikation.

Um dieses Inverse zu finden, ist es notwendig, den Begriff des konjugierten Zahlenpaares einzuführen.

Die aus z konjugierte Zahl $\bar{z}$ hat im Imaginärteil das entgegengesetzte Vorzeichen wie *z*.

$$z = a + bi = (a;b) \qquad \bar{z} = a - bi = (a;-b)$$

Das Produkt eines konjugierten Zahlenpaares ist immer reell.

$$z \cdot \bar{z} = (a+bi)(a-bi) = a^2 - abi + abi + b^2 = a^2 + b^2$$

Ist $z \neq 0$, so ist auch $a^2 + b^2 \neq 0$.

$$z\left(\frac{1}{a^2+b^2}\bar{z}\right) = 1, \text{ denn } \frac{1}{z\bar{z}} = \frac{1}{a^2+b^2}.$$

Das Inverse zu *z* ist daher:

$$z^{-1} = \frac{1}{a^2+b^2}\bar{z} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}}.$$

Divisionen komplexer Zahlen löst man am einfachsten durch Erweitern mit dem konjugierten Nenner.

Wie zum Beispiel:

$$\frac{5-2i}{4+6i} = \frac{(5-2i)(4-6i)}{(4+6i)(4-6i)} = \frac{20-8i-30i-12}{16+36} = \frac{8}{52} - \frac{38}{52}i = \frac{2}{13} - \frac{19}{26}i.$$

II.6. Verzicht auf Anordnung

Es ist zwar möglich, mit komplexen Zahlen so wie mit reellen Zahlen zu rechnen, aber die Anordnungsaxiome gelten in $\mathbb{C}$ nicht mehr.

Weil $i \neq 0$ ist, müsste aufgrund der Trichotomie $i < 0$ oder $i > 0$ gelten.

Jede der Aussagen stößt auf Widersprüche.

Ist $i < 0$, so gilt aufgrund der Monotonie der Multiplikation $i \cdot i > 0 \cdot i = -1 > 0$!

III. Die Gaußsche Zahlenebene[3] (Haydar)

III.1. Einleitung

Von den reellen Zahlen ist uns schon bekannt (Zahlenstrahl), dass man sie alle auf einer eindimensionalen reellen Zahlengeraden abbilden kann, wobei jede reelle Zahl aus einem Teil, nämlich dem reellen Teil besteht. Demmig sagt, dass die reellen Zahlen auf der Zahlengeraden „dicht" zusammen liegen. Das heißt, dass zwischen zwei Zahlen unendlich viele andere Zahlen existieren oder wie Demmig sagt, dass in jeder beliebig kleinen Umgebung einer reellen Zahl weitere, unendlich viele Zahlen liegen. Jede reelle Zahl besteht aus einem Teil, nämlich dem reellen Teil, deshalb bezeichnet Demmig reelle Zahlen als „eindimensional". Da eine komplexe Zahl aus zwei Teilen besteht, einem Realteil x und einem Imaginärteil y, und somit auch ein geordnetes Paar reeller Zahlen (x;y) ist, wird eine Ebene benötigt, um diese darstellen zu können. Demmig sagt, komplexe Zahlen seien auf Grund ihrer zwei Teile „zweidimensional".

Die Ebene, auf der komplexe Zahlen dargestellt werden können, nennt man die Gaußsche Zahlenebene, benannt nach Carl Friedrich Gauß (1777 – 1855). Man kann aus dem Reellen übertragen und sagen, dass zwischen zwei imaginären Zahlen auf der imaginären Achse unendlich viele andere imaginäre Zahlen liegen. Die reelle Achse ist identisch mit der vorhin erwähnten Zahlengeraden im Reellen.

III.2. Abbildung komplexer Zahlen auf der Gaußschen Zahlenebene

Die Vorgehensweise bei der Darstellung komplexer Zahlen auf der Gaußschen Zahlenebene ist wie folgt: Den reellen Teil x trägt man auf der x-Achse ab. Diese Achse wird auch die reelle Achse genannt. Auf der y-Achse, der imaginären Achse, wird der imaginäre Teil der Zahl abgetragen. Real- und Imaginärteil sind somit die Abszissen (Ordinaten) des zugehörigen Punktes, der die gesamte komplexe Zahl darstellt. Somit ist es möglich jede beliebige komplexe Zahl auf der Gaußschen Zahlenebene abzubilden. Zu jedem Punkt auf der Gaußschen Zahlenebene gehört eine bestimmte komplexe Zahl. Zu jeder komplexen Zahl z wird eine konjugiert komplexe Zahl $\overline{z}$ erklärt, die man dann erhält, wenn man eine komplexe Zahl z an der reellen Achse spiegelt.

Die konjugiert komplexe Zahl hat die Form: $\overline{z} = x - i \cdot y$. Wenn man diese Form mit der Form der komplexen Zahl z vergleicht, so stellt man fest, dass sich an dem reellen Teil nichts geändert hat, nur der imaginäre Teil hat ein umgekehrtes Vorzeichen.

[3] Ltv.: 2, S. 6-7

(siehe dazu die Grafik „Die konjugiert komplexe Zahl $\bar{z}$“).
Eine reelle Zahl ist eine komplexe Zahl, bei der der Imaginärteil gleich 0 ist. Alle rein reellen Zahlen würden somit auf der reellen Achse liegen $z_{reell} = x + 0 \cdot i = x$. Eine rein imaginäre Zahl wäre eine komplexe Zahl, bei der der Realteil gleich 0 ist. Alle rein imaginären Zahlen wären auf der imaginären Achse abzutragen $z_{imaginär} = 0 + y \cdot i = y \cdot i$. Jede komplexe Zahl auf der Gaußschen Zahlenebene besitzt einen Ortsvektor mit dem x und y Komponenten. Der Ortsvektor geht von dem Punkt (0/0) aus und zeigt auf dem abgebildeten Punkt der komplexen Zahl. Da wir die komplexen Zahlen zweidimensional abbilden, besitzen somit auch die Ortsvektoren nur zwei Komponenten (x und y). **Mit Hilfe dieser Ortsvektoren ist es möglich, die Addition und Subtraktion komplexer Zahlen geometrisch zu interpretieren, da diese Rechenvorschriften analog zur Addition der zugehörigen Ortsvektoren definiert sind.**
(siehe dazu die Grafik „Addition und Subtraktion der Ortsvektoren“).
Die Assoziativität und Kommutativität im Komplexen ist ebenfalls mit der Kommutativität und Assoziativität der zugehörigen Ortsvektoren zu begründen.
(siehe dazu die Grafik „Assoziativität der Ortsvektoren“)
Die Erweiterung der Gaußschen Zahlenebene ist die Polarkoordinatendarstellung.

IV. Polarform komplexer Zahlen[4] (Robert)

IV.1. Betrag komplexer Zahlen

Inzwischen wissen wir, dass komplexe Zahlen in der Gaußschen Zahlenebene auch durch Vektoren dargestellt werden können. Dazu nimmt man einen Zeiger, der vom Ursprung bis zum Punkt z, also der komplexen Zahl in der Ebene, und den Winkel zwischen dem Zeiger und der Achse der Realzahlen.
Die Länge des Vektors z ist per Definition der Betrag von z und der Abstand vom Ursprung zum Punkt z. In der Zahlenebene berechnet man die Länge des Vektors z mit Hilfe des Satzes von Pythagoras. Dazu addiert man den quadrierten Real- und Imaginärteil (also x und y) und zieht die Wurzel daraus: $|z| = |x + yi| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

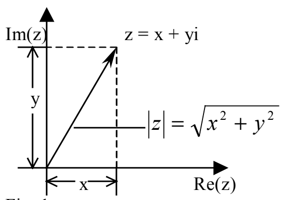


Fig. 1

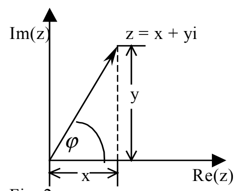


Fig. 2

[4] Ltv.: 1, S. 31-36

Den Winkel zwischen dem Zeiger und der Achse der Realzahlen bezeichnet man mit dem griechischen Buchstaben φ. Durch Anwendung einfacher trigonometrischer Funktionen kann man folgende Gleichungen aufstellen:

$x = |z| \cdot \cos\varphi \qquad y = |z| \cdot \sin\varphi \qquad \tan\varphi = \frac{y}{x}$, für $x \neq 0$

Für $x = 0$ und $y > 0$ ist $\varphi = +\frac{\pi}{2}$, und für $y < 0$ ist $\varphi = -\frac{\pi}{2}$.

IV.2. Polarform

Mit Hilfe der aufgestellten Gleichung kann man jetzt eine komplexe Zahl auf eine neue Weise darstellen. Die allgemeine Form lautet: $z = x + yi = |z| \cdot (\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi)$.

Die trigonometrische Summe wird häufig abgekürzt. In der Literatur werden dabei verschiedene Abkürzungen verwendet, Dittmann benutzt jedoch folgende:
$E(\varphi) = (\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi)$.

Somit ist die Polarform der komplexen Zahl auf diese Art zu schreiben: $z = |z| \cdot E(\varphi)$.

An einigen konkreten Beispielen sieht das folgendermaßen aus:

$z = -1$ $\qquad |z| = \sqrt{(-1)^2 + 0^2} = 1, \quad y = 0, \quad x > 0, \quad \tan\varphi = \frac{0}{-1} = 0$
Weil z auf der negativen Achse der Realzahlen liegt muss $\varphi = \pi$ sein.
Also ist $z = E(\pi)$.

$z = 6 + 8i$ $\qquad |z| = \sqrt{6^2 + 8^2} = \sqrt{100} = 10, \quad \tan\varphi = \frac{8}{6}$
Gerundet auf 2 Nachkommastellen ergibt sich für $\varphi = 53{,}13°$.
Also ist $z = 10E(53{,}13°)$.

$z = 0$ $\qquad |z| = 0$, da für $x = 0$ und $y = 0$ kein Winkel definiert ist, gilt für jeden Winkel $\varphi \quad 0 = 0 \cdot E(\varphi)$.

Der Winkel φ ist definiert für alle $\varphi \in \mathbb{R}$ und periodisch mit 2π. Damit weist die Zahl $E(\varphi)$ folgende Eigenschaften auf:

$E(\varphi + k \cdot 2\pi) = E(\varphi)$ für alle $k \in \mathbb{Z}$, $\varphi \in \mathbb{R}$.

$E(0) = E(2\pi) = E(k \cdot 2\pi) = 1$.

$|E(\varphi)| = \sqrt{\cos^2\varphi + \sin^2\varphi} = \sqrt{1} = 1$.

IV.3. Deutung der Multiplikation

Um 2 komplexe Zahlen in der Polarform zu multiplizieren muss man ihre Beträge und die trigonometrischen Summen multiplizieren.

Da die Multiplikation der trigonometrischen Summe, also der Zahl $E(\varphi)$ nicht auf Anhieb klar ist, gehen wir sie Schritt für Schritt durch:

Wir nehmen zwei komplexe Zahlen $z_1 = |z_1|E(\varphi_1)$ und $z_2 = |z_2|E(\varphi_2)$. Die Multiplikation beider Zahlen ergibt $z_1 \cdot z_2 = |z_1| \cdot |z_2| \cdot E(\varphi_1) \cdot E(\varphi_2)$. Die Multiplikation von $E(\varphi_1)$ und $E(\varphi_2)$ sieht folgendermaßen aus:

$$\begin{aligned} E(\varphi_1) \cdot E(\varphi_2) &= (\cos\varphi_1 + i \cdot \sin\varphi_1)(\cos\varphi_2 + i \cdot \sin\varphi_2) \\ &= \cos\varphi_1 \cdot \cos\varphi_2 + \cos\varphi_1 \cdot i \cdot \sin\varphi_2 + \cos\varphi_2 \cdot i \cdot \sin\varphi_1 + i^2 \cdot \sin\varphi_1 \cdot \sin\varphi_2 \\ &= \cos\varphi_1 \cdot \cos\varphi_2 - \sin\varphi_1 \cdot \sin\varphi_2 + i(\cos\varphi_1 \cdot \sin\varphi_2 + \cos\varphi_2 \cdot \sin\varphi_1) \end{aligned}$$

Um den Term zu vereinfachen wendet man folgende Umformungsgesetze[5] für trigonometrische Funktionen an:

1. $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta \pm \cos\alpha \cdot \sin\beta$
2. $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta \mp \sin\alpha \cdot \sin\beta$

Somit ist für alle $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathbb{R}$: $E(\varphi_1) \cdot E(\varphi_2) = \cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \cdot \sin(\varphi_1 + \varphi_2) = E(\varphi_1 + \varphi_2)$.

Aus dieser Formel lassen sich weitere Eigenschaften aufzeigen. So ist z.B. das Ergebnis aus der Multiplikation $E(\varphi) \cdot E(-\varphi) = E(0) = 1$ für alle $\varphi \in \mathbb{R}$. Und wenn man 2 gleiche Winkel nimmt dann folgt daraus $[E(\varphi)]^2 = E(\varphi) \cdot E(\varphi) = E(\varphi + \varphi) = E(2\varphi)$.

Allgemein lautet die Formel für Potenzen, die Abraham de Moivre aufgestellt hat:

$[E(\varphi)]^n = E(n\varphi)$ für alle $n \in \mathbb{N}$, $\varphi \in \mathbb{R}$.

Nun kann man ebenfalls das Produkt von 2 komplexen Zahlen in Polarform aufschreiben:

$z_1 \cdot z_2 = |z_1| \cdot |z_2| \cdot E(\varphi_1)E(\varphi_2) = |z_1| \cdot |z_2| \cdot E(\varphi_1 + \varphi_2)$

Die Multiplikation zweier komplexer Zahlen bedeutet die Multiplikation ihrer Beträge und die Addition ihrer Argumente.[6]

Um diesen Sachverhalt veranschaulichen zu können nehmen wir 2 komplexe Zahlen in der Polarform, $z_1 = 3E(36°)$ und $z_2 = 4E(84°)$, und multiplizieren sie.

$z_1 \cdot z_2 = 3 \cdot 4 \cdot E(36° + 84°) = 12 \cdot E(120°)$

In Figur 3 sieht man das Produkt als Vektor in der Gaußschen Zahlenebene.

[5] Ltv.: 3, S. 16

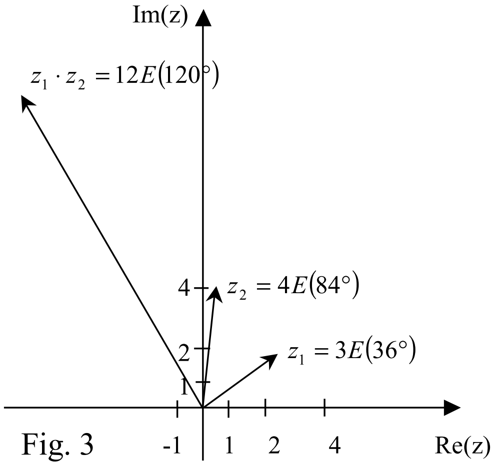


Fig. 3

IV.4. Deutung der Division

Analog zur Deutung der Multiplikation lässt sich auch die Division komplexer Zahlen in der Polarform darstellen. Dittmann verkürzt seine Erläuterung indem er den Divisor als Invers einer komplexen Zahl darstellt. Ich werde jedoch die Herleitung der Formel für die Division auf ähnliche Weise durchführen, wie für die Formel zur Multiplikation.

Das Problem liegt wieder bei der Division der Zahlen $E(\varphi_1)$ und $E(\varphi_2)$ für beliebige Winkel.

$$\frac{E(\varphi_1)}{E(\varphi_2)} = \frac{\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1}{\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2} \left| \frac{\cdot(\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2)}{\cdot(\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2)} \right. \qquad \text{für } E(\varphi_2) \neq 0$$

Erweitern mit dem konjugierten Nenner.

$$= \frac{\cos\varphi_1 \cdot \cos\varphi_2 - \cos\varphi_1 \cdot i\sin\varphi_2 + \cos\varphi_2 \cdot i\sin\varphi_1 + \sin\varphi_1 \cdot \sin\varphi_2}{\cos^2\varphi_2 + \sin^2\varphi_2}$$

$$= \cos\varphi_1 \cdot \cos\varphi_2 + \sin\varphi_1 \cdot \sin\varphi_2 + i(\cos\varphi_2 \cdot \sin\varphi_1 - \cos\varphi_1 \cdot \sin\varphi_2)$$

Anwendung der Umformungsgesetze für trigonometrische Funktionen.

$$= \cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)$$

$$= E(\varphi_1 - \varphi_2)$$

Allgemein können wir jetzt für die Division komplexer Zahlen folgendes festhalten:

Für $z_2 \neq 0$ ist $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}\dfrac{E(\varphi_1)}{E(\varphi_2)} = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}E(\varphi_1 - \varphi_2)$.

Division komplexer Zahlen bedeutet Division ihrer Beträge und Subtraktion ihrer Argumente[7].

Wir überprüfen diese Formel einmal indem wir das Beispiel für die Multiplikation nehmen. Wenn wir das Produkt aus der Multiplikation nehmen und es durch einen der Faktoren teilen, dann müsste jeweils der andere Faktor als Ergebnis herauskommen.

---

[6] Zitat: Helmut Dittmann, Ltv.: 1, S.34

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{12E(120°)}{3E(36°)}=\frac{12}{3}E(120°-36°)=4E(84°) \quad q.e.d.$$

IV.5. Winkel zwischen Vektoren

Um den Winkel zwischen zwei Vektoren, die zu zwei komplexen Zahlen gehören, zu ermitteln, nehmen wir zwei Pfeilrepräsentanten $\overrightarrow{Oz_1}$ und $\overrightarrow{Oz_2}$, die z_1 und z_2 in der Zahlenebene darstellen.

Zwischen beiden Zeigern existiert ein bestimmter Winkel, den wir $\varepsilon = \measuredangle\left(\overrightarrow{Oz_1},\overrightarrow{Oz_2}\right)$ nennen.

Wenn $\varphi_2 > \varphi_1$ dann ist $\varepsilon = \varphi_2 - \varphi_1$, andernfalls ist $\varepsilon = 2\pi + (\varphi_2 - \varphi_1)$.

Als abschließendes Beispiel nehmen wir die Zahlen $z_1 = 1+2i$ und $z_2 = 2+5i$, wandeln sie in die Polarform um, multiplizieren sie, bilden einen Quotienten und berechnen den Winkel zwischen den Zeigern.

Polarform (gerundet auf 2 Nachkommastellen)

$z_1 = 1+2i$ $\quad |z_1| = \sqrt{1^2+2^2} = \sqrt{5}$, $\tan\varphi_1 = \frac{2}{1} = 2 \Rightarrow \varphi_1 = 63{,}43°$

$$z_1 = \sqrt{5}\cdot E(63{,}43°)$$

$z_2 = 2+5i$ $\quad |z_2| = \sqrt{2^2+5^2} = \sqrt{29}$, $\tan\varphi_2 = \frac{5}{2} = 2{,}5 \Rightarrow \varphi_2 = 68{,}20°$

$$z_2 = \sqrt{29}\cdot E(68{,}20°)$$

Multiplikation

Hierbei führen wir die Multiplikation zuerst an der Summenform aus und überprüfen anschließend die Ergebnisse aus der Multiplikation in der Polarform.

$$z = z_1\cdot z_2 = (1+2i)(2+5i) = -8+9i$$

$$|z| = \sqrt{(-8)^2+9^2} = \sqrt{145},\ \tan\varphi = \frac{-8}{9} \Rightarrow \varphi = -41{,}63°$$

Aus dem negativen Wert von φ und der Summenform erkennt man, dass z im 2. Quadranten liegt. Also folgt daraus $\varphi = 90° + 41{,}63° = 131{,}63°$ und damit ist $z = \sqrt{145}\cdot E(131{,}63°)$.

$$z = z_1\cdot z_2 = \sqrt{5}\cdot\sqrt{29}\cdot E(63{,}43°)\cdot E(68{,}20°) = \sqrt{145}\cdot E(63{,}43°+68{,}20°) = \sqrt{145}\cdot E(131{,}63°)$$

Aus dem Vergleich sieht man, dass die Ergebnisse übereinstimmen.

Division

$$z = \frac{z_2}{z_1} = \frac{\sqrt{29}\cdot E(68{,}20°)}{\sqrt{5}\cdot E(63{,}43°)} = \sqrt{\frac{29}{5}}\cdot E(68{,}20°-63{,}43°) \approx 2{,}41E(4{,}77°)$$

[7] Zitat: Helmut Dittmann, Ltv.: 1, S.35

Winkel zwischen beiden Zeigern

$\varepsilon = \varphi_2 - \varphi_1 = 68{,}20° - 63{,}43° = 4{,}77°$

Mit diesem Kapitel wurden alle wesentlichen Grundrechrechenarten und Herleitungen zur geometrischen Deutung komplexer Zahlen behandelt. Dieses wissen wird in den nachfolgenden Kapiteln vorausgesetzt. Teilweise werden explizite Verweise auf dieses Kapitel gegeben, die wichtig für die Verständlichkeit eines der folgenden Kapitel und Themen sind.

V. Die algebraische Abgeschlossenheit von ℂ (Philipp)

Einen Term der Form $f(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + ... + a_1 z + a_0$ indem z eine Variable ist und $a_{n-1},...,a_0 \in \mathbb{C}$ sind nennt man ein Polynom, wobei die natürliche Zahl n der Grad des Polynoms ist.

Die Nullstellen der Funktion $f(z) = 0$ erhält man, wenn man das Polynom der Funktion gleich 0 setzt, und so eine Gleichung n. Grades erhält, die dann als Lösung die Nullstellen hat. Das ist bei komplexen Zahlen nicht anders als bei reellen Zahlen.

V.1. Darstellung von Lösungen durch Radikale[8]

Zu Polynomen 1. Grades gehören bekanntlich Gleichungen 1. Grades. Sie haben immer genau eine Lösung.

$a_1 z + a_0 = 0$ mit $a_1, a_0 \in \mathbb{C}$ und $a_1 \neq 0$, dann ist $z_1 = \frac{-a_0}{a_1}$.

Polynome zweiten Grades haben eine quadratische Gleichungen als Lösung.

$a_2 z^2 + a_1 z + a_0 = 0$ mit $a_2 \neq 0$, dann ist $z_{1,2} = \frac{-a_1 \pm \sqrt{\left(a_1^2 - 4a_2 a_0\right)}}{2a_2}$.

Hier ist die Lösung nur noch durch Radikale möglich.

Polynome 3. Grades und 4. Grades haben Gleichungen als Lösung, für die es noch einen Lösungsterm gibt, die aber wesentlich komplizierter ausfallen.

Für Gleichungen vom Grad $n \geq 5$ konnte Abel 1824 zeigen, dass hier die Auflösung der Radikale grundsätzlich nicht möglich ist. Alle vorhergehenden Versuche waren also vergeblich.

Dieser Satz über die Nichtauflösbarkeit von Gleichungen höheren Grades sagt aber nicht, dass es keine Lösung für solche Gleichungen gibt, wenn man als Koeffizienten irgendwelche

Zahlen aus ℂ nimmt. Er sagt nur, dass es keinen Term gibt, der aus $a_n, a_{n-1}, ..., a_0$ aufgebaut ist und allgemein eine Lösung solcher Gleichungen darstellt.

V.2. Fundamentalsatz der Algebra[9]

Ob nun solche Gleichungen überhaupt eine Lösung haben, hängt im wesentlichen von der Grundmenge ab.
Die Gleichung x² -1 hat in ℝ hat ja auch keine Lösung. Die Menge ℝ musste erst erweitert werden, damit jede quadratische Gleichung eine Lösung bekommt.
Dass dies nicht nötig ist, besagt der **Fundamentalsatz der Algebra**, der schon von Leonard Euler vermutet wurde, aber erst später von C. F. Gauß bewiesen werden konnte. Er besagt, dass jede Gleichung vom Grad $n \geq 1$ mit Koeffizienten aus ℂ bereits in ℂ eine Lösung hat. Das zeigt, dass ℂ eine Eigenschaft hat, die in ℝ noch fehlte. Die Menge ℂ **ist algebraisch abgeschlossen. Das heißt, dass es keine Möglichkeit gibt, ℂ durch Hinzufügen neuer Zahlen zu erweitern.**
Dieser Fundamentalsatz ist ein reiner Existenzsatz. Er sagt nichts darüber aus, wie man die Lösungen von solchen Gleichungen berechnen kann.

V.3. Wurzeln von komplexen Zahlen[10]

Gesucht ist die Zahl *z*, für die gilt $z^2 = a \quad (a, z \in \mathbb{C})$. Diese quadratische Gleichung löst man am besten, indem man *z* und *a* in Polarform schreibt $(|z|E(\varphi))^2 = |a|E(\varphi)$. Die Überlegung, welche Zahl quadriert *a* ergibt, kann man sich indirekt verdeutlichen: Eine komplexe Zahl in Polarform quadriert man folgendermaßen: $|r|E(\varphi) \cdot |r|E(\varphi) = |r|^2 E(2\varphi)$ (Formel von Moivre). Wenn man diese Rechenschritte rückgängig macht, zieht man die Wurzel aus dem Betrag der Zahl und teilt die Winkel durch zwei, also $\sqrt{z} = \left|\sqrt{z}\right| E\left(\frac{\varphi}{2}\right) = \left|\sqrt{z}\right| \left(\cos\frac{\varphi}{2} + i \sin\frac{\varphi}{2}\right)$.

Somit ist der Hauptwert der Quadratwurzel aus *z* gefunden. Betrachtet man die verschiedenen Lösungen einer Gleichung der Form $z^2 = a$ bzw. $z = \sqrt{a}$, so wird einem auffallen, dass die beiden Lösungen der Gleichungen zwar den gleichen Betrag haben, aber um π verschoben sind (sehr einfach ist dieser Fall am Beispiel $z = \sqrt{1}$ zu verdeutlichen. Die Lösungen 1 und –1 haben den Gleichen Betrag, liegen aber in entgegengesetzter Richtung auf der Real-Achse).

---

[8] Ltv.: 1, S. 90-91
[9] Ltv.: 1, S. 91-92
[10] Ltv.: 4, S. 126 ff, 151 ff

Also kann man allgemein für die Lösungen von quadratischen Gleichungen folgenden Lösungsterm anwenden: $\sqrt{a} = \sqrt{a}E(\varphi + k\pi)$ mit $a \in \mathbb{C}$ und k = 0 und 1 (größere k würden wieder zur gleichen komplexen Zahl führen).

Für die n. Wurzel einer komplexen Zahl gilt dann also $a^{\frac{1}{n}} = \left|a^{\frac{1}{n}}\right| E\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{k2\pi}{n}\right)$.

V.4. Kreisteilungsgleichung[11]

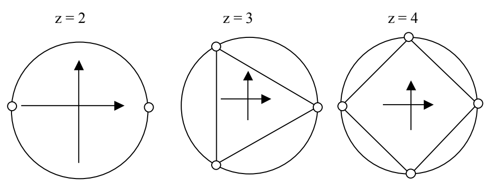
Die Gleichung $z^n = 1$ mit $z \in \mathbb{N}$ wird als Kreisteilungsgleichung bezeichnet. Die Zahl 1 ist nicht die einzige Lösung dieser Gleichung. Diese Gleichung hat n verschiedene Lösungen von komplexen Zahlen. Am besten kann man dieses Verhalten verdeutlichen, wenn man *z* in Polarform schreibt. Dann ist $z^n = \left|r^n\right| E(n\varphi) = 1$ mit $r \in \mathbb{R}+$.

Bildet man die Beträge so erhält man $r^n = 1$. Und weil $r \in \mathbb{R}+$ ist, folgt daraus r = 1. Also ist $E(n\varphi) = 1$. Diese Gleichung wird mit $n\varphi = 0$ also $\varphi = 0$ erfüllt. $E(\alpha)$ ist aber eine periodische Funktion mit der Periode 2π . Also sind auch alle $E(k2\pi)$ Lösungen dieser Gleichung. Daher ergibt sich $n\varphi = k2\varphi$ oder $\varphi_k = \frac{k}{n}2\pi$.

Eigentlich müsste es unendlich viele verschiedene Lösungen dieser Gleichung geben, aber weil ganzzahlige Vielfache von 2π wieder zur gleichen komplexen Zahl führen, gibt es nur n verschiedene Lösungen.

Die Gleichung $z^n = 1$ wird Kreisteilungsgleichung genannt, weil sie einen Einheitskreis auf der Gaußschen Zahlenebene in n gleich große Teile teilt. Die Lösung der Gleichung wird oftmals auch als n. Einheitswurzel bezeichnet, da sie allgemein auch mit $\sqrt[n]{1}$ beschrieben werden kann.

Lösungen für n = 1,2,3 sind dann:



Für die Lösungen der 3. Einheitswurzel (Lösungen von) $z^3 = 1$ ergeben sich dann folgende drei Lösungen:

[11] Ltv.: 1, S. 92-93

$$\varepsilon_4(0) = E(0) = 1$$

$$\varepsilon_4(1) = E\left(\frac{1}{3}2\pi\right) = E\left(\frac{2}{3}\pi\right) = -0{,}5 + 0{,}865i$$

$$\varepsilon_4(2) = E\left(\frac{2}{3}2\pi\right) = E\left(\frac{4}{3}\pi\right) = -0{,}5 - 0{,}865i$$

V.5. Iterationsverfahren[12]

Das Iterationsverfahren ist ein Verfahren zur Berechnung von Lösungen, das mit komplexen Zahlen sehr gut angewendet und verdeutlicht werden kann.

Wenn man zum Beispiel die Lösung für die Gleichung $z^2 + 3z - 2 = 0 \Longleftrightarrow \frac{1}{3}(z^2 + 2) = z$ finden möchte, bildet man eine Folge mit dem Bildungsgesetz $z_{n+1} = \frac{1}{3}(z^2{}_n + 2)$ für $z_1, z_2, z_3, ..., z_n$. Als Anfangsglied wird $z_1 = 0$ genommen. Es entsteht die Folge (auf vier Stellen nach dem Komma gerundet):

$$z_2 = \frac{1}{3}\left(0^2 + 2\right) = \frac{2}{3}\ ,\ z_3 = \frac{1}{3}\left(\left(\frac{2}{3}\right)^2 + 2\right) = 0{,}8148\ ,\ z_4 = \frac{1}{3}\left(z_3{}^2 + 2\right) = 0{,}8880\ ,$$

$$z_5 = \frac{1}{3}\left(z_4{}^2 + 2\right) = 0{,}9295\ ,\ z_6 = \frac{1}{3}\left(z_5{}^2 + 2\right) = 0{,}9547\ ,\ z_7 = 0{,}9705\ ,\ z_8 = 0{,}9806\ , ...$$

Da die Lösungen dieser Gleichung (1 und 2) ja bekannt sind, sieht man, dass z_8 schon ein ziemlich guter Näherungswert für eine Lösung ist. Bei weiteren Rechnungen kommt man (gerundet zu einer gewissen Stelle) zu keiner Veränderung mehr.

Die Wahl für $z_1 = 0$ war zufällig. Für $z_1 = 50$ erhält man:

$$z_2 = \frac{1}{3}\left(50^2 + 2\right) = 834\ ,\ z_3 = \frac{1}{3}\left(834^2 + 2\right) = 231852\frac{1}{3}\ , ...$$

Die Folge konvergiert nicht, sie wird unendlich groß. Das Anfangsglied darf nicht zu weit von der Lösung entfernt liegen.

Um die andere Lösung zu erreichen, kann man durch Polynomdivision die schon gefundene Lösung „wegdividieren", oder eine andere Äquivalenzgleichung nehmen:

$z = \sqrt{-3z + 2}$. Die Iterationsformel ist dann $z_{n+1} = \sqrt{-3z_n + 2}$. Um die Folge zu berechnen, habe ich ein selbstentwickeltes Computerprogramm benutzt. Die Iterationstabelle befindet sich im Anhang. Diese Folge strebt den Grenzwert 2 an, der die zweite Lösung der ursprünglichen Gleichung ist, wenn man stets den Hauptwert der Wurzel zur Berechnung des

nächsten Gliedes benutzt. Der Unterschied bei dieser Iterationsformel ist, dass ich kein Anfangsglied gefunden habe, bei dem die Folge den Grenzwert 2 nicht erreicht. Auch Zahlen mit einem Imaginärteil führten zum gleichen (richtigem) Ergebnis.
(Zitat Dittmann):
Allgemein lässt sich das Iterationsverfahren folgendermaßen darstellen :
Die Gleichung $f(z)=0$ wird in die äquivalente Form $g(z)=z$ gebracht, was auf verschiedene Weisen möglich ist. Dann bildet man die Iterationsformel $z_{n+1}=g(z_n)$.
Aus einem frei wählbaren Element bildet man dann die Folge $z_1, z_{2,} z_3,..., z_n$. Falls $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z_0$ existiert, dann ist $\lim\limits_{n\to\infty} z_{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} g(z_n)$.
Die Iteration $z_{n+1}=g(z_n)$ liefert eine gegen $z_0=g(z_0)$ konvergente Zahlenfolge, wenn $g'(z_0)$ existiert, einen kleineren Betrag als 1 hat und das Anfangsglied z_1 hinreichend nahe bei z_0 liegt.

VI. Komplexe Funktionen (Haydar)

VI.1. Einleitung[13]

Bisher haben wir Funktionen kennengelernt $y=f(x)$, wobei die Variable x Element der reellen Zahlen war. Nun wollen wir Funktionen mit einer komplexen Veränderlichen $z=x+i\cdot y$ untersuchen: $\xi = f(z)$. Bei reellen Funktionen wurde jeder reellen Zahl x aus dem Definitionsbereich der Funktion ein reeller Funktionswert f zugeordnet. Die Menge aller Funktionswerte bildeten den Wertebereich der Funktion. Zum Beispiel bei der Funktion $f(x)=\frac{1}{x}$ gehören alle reellen Zahlen außer der Null ($\mathbb{R}$`$\{0\}$) zum Definitionsbereich.
Ebenfalls alle reellen Zahlen, außer der Null, gehören zum Wertebereich, da jede reelle Zahl ausgenommen der Null, für x eingesetzt werden darf und die Begründung für den Wertebereich ist, dass bei einer Division, ausgenommen, wenn der Dividend Null lautet, nie der Quotient Null ist. Grafisch stellt die y-Achse eine Polgerade und die x- Achse eine waagrechte Asymptote in diesem Beispiel dar. Übertragen zum Komplexen wird nun jeder komplexen Zahl z aus dem Definitionsbereich der komplexen Funktion ein komplexer Funktionswert ξ zugeordnet.

---

[12] Ltv.: 1, S. 102-104

VI.2. Eindeutigkeit komplexer Funktionen

Eine wichtige Frage ist bei reellen ebenso wie bei komplexen Funktionen die Eindeutigkeit. Eindeutigkeit bedeutet, dass jeder komplexen Zahl z des Definitionsbereichs genau eine Zahl $\xi = f(z)$ zugeordnet ist. Das „Wurzelziehen" jedoch liefert keine eindeutige Funktion. Die komplexe Funktion $f(z) = \sqrt{z}$ liefert z.B. zwei Lösungen für *z*, nämlich $f_1 = \sqrt{z}$ und $f_2 = -\sqrt{z}$ .Um dieser Funktion eine eindeutige Lösung zuzuweisen, hat man daher eine Verabredung getroffen**. Die Wurzel aus *z* sei die Zahl mit dem kleineren Polarwinkel**. Mit dieser Definition hat man erreicht, dass nun eine eindeutige Funktion $f(z) = \sqrt{z}$ vorliegt. Diese bereits genannte Verabredung $\sqrt{z} = \sqrt{|z|} \cdot \left(\cos\frac{\varphi}{2} + i\sin\frac{\varphi}{2} \right)$, die bei der „Umkehrung des Potenzierens" verabredet wird, verwandelt eine nicht eindeutige Funktion in eine Eindeutige.

VI.3. Niveaus der Gaußschen Zahlenebene[14]

Um die beiden Niveaus der Gaußschen Zahlenebene nachvollziehen zu können, führt Demmig folgendes Beispiel vor: Man stelle sich einen Kreis um den Ursprung vor. Beginnend auf der reellen Achse durchlaufen wir diesen Kreis und wollen die Quadratwurzeln der Punkte auf dem Kreis abbilden. Wir erkennen, dass die Quadratwurzeln der sich auf dem Kreis befindenden Punkte beim ersten Durchlauf allesamt auf der oberen Halbebene liegen (oberhalb der reellen Achse). Wir sind wieder auf der reellen Achse angekommen. Der zweite Umlauf beginnt. Nun sehen wir, dass diesmal die Quadratwurzeln auf der unteren Halbebene liegen (unterhalb der reellen Achse). Beim dritten Umlauf stellen wir fest, dass der selbe Fall wie beim ersten Umlauf auftritt. Die Quadratwurzeln liegen ebenfalls auf der oberen Halbebene. Man muss also unterscheiden, auf welchem Umlauf man sich befindet oder anders ausgedrückt zwischen welchen Vielfachen von $2 \cdot \pi$ der Polarwinkel liegt. Beim ersten Umlauf lag der Polarwinkel z.B. zwischen 0 und $2 \cdot \pi$. Beim zweiten Umlauf zwischen $2 \cdot \pi$ und $4 \cdot \pi$. Wir haben uns beim ersten Umlauf auf dem ersten Niveau, beim zweiten Umlauf auf dem zweiten, beim dritten wieder auf dem ersten Niveau befunden. Beim vierten Umlauf würden wir wieder die zweite Ebene betreten, die wir schon beim zweiten Umlauf durchlaufen haben. Der Polarwinkel würde zwischen $6 \cdot \pi$ und $8 \cdot \pi$ liegen. Jedes Mal beim Wechsel der Niveaus überschreitet man die Grenzlinie, die man auch einen „Verzweigungsschnitt" nennt. In diesem Beispielsfall, also $f(z) = \sqrt{z}$, war die

[13] Ltv.: 2, S. 41
[14] Ltv.: 2, S. 42

positive reelle Achse der „Verzweigungsschnitt“, da man jedes Mal beim Überschreiten der positiven reellen Achse die Niveaus gewechselt hat. Der Verzweigungsschnitt hätte auch entlang einer anderen Halbgerade, die bei $z = 0$ endet, liegen können. Bei $z = 0$, dem „Verzweigungspunkt“ wo die Funktionswerte übereinstimmen endet jeder Verzweigungsschnitt. Ich nehme mir jetzt die Funktion $\sqrt[5]{z}$ vor und untersuche diese auf Verzweigungsschnitte. Beim ersten Umlauf ($0 <$ Winkel in z $< 2 \cdot \pi$) liegen die Polarwinkel der 5. Wurzel zwischen Null und $\frac{2 \cdot \pi}{5}$, denn zieht man die n-te Wurzel einer komplexen Zahl, so wird der Polarwinkel durch n geteilt. Erst beim fünften Umlauf liegen die Polarwinkel der 5. Wurzeln zwischen $\frac{8 \cdot \pi}{5}$ und $2 \cdot \pi$ und danach, bei Überschreitung der reellen Achse tritt wieder der Fall beim ersten Umlauf auf ($0 <$ Polarwinkel der 5.Wurzel$< \frac{2 \cdot \pi}{5}$). Wir mussten fünf mal den Winkel in z von 0 bis $2 \cdot \pi$ durchlaufen, also spricht man von fünf Niveaus. Der Verzweigungsschnitt ist die positiv reelle Achse, da der Übergang von einem Niveau ins andere dort erfolgte.

VI.4. Unendliche Reihen im Allgemeinen und die Potenzreihe[15]

Die wichtigsten Funktionen lassen sich durch unendliche Reihen darstellen.
Unter einer unendlichen Reihe versteht man zunächst eine Folge a_n, deren Gliedzahl in das Unendliche geht $(n \to \infty)$ und deren Summanden reelle Zahlen oder Funktionswerte einer beliebigen Veränderlichen sein können , also

$a_n = a_0 + a_1 + a_2 + ... + a_n = \sum_{v=0}^{\infty} a_v$. $a_0, a_1, a_3, ...$ sind die Glieder der Reihe. Wenn die Summenfolge gegen einen Grenzwert strebt, konvergiert die unendliche Reihe. Man sagt auch sie sei konvergent. Wenn die Summenfolge keinen Grenzwert aufweist, so nennt man sie divergent.
Dies ist in den Anwendungen dann von Bedeutung, wenn die Glieder einer solchen Reihe sukzessive rasch kleiner werden, d.h., wenn die Reihe rasch konvergiert.
Die Potenzreihe ist eine unendliche Reihe, deren Glieder Funktionswerte einer Variablen sind.
Die Funktion der Potenzreihe im Komplexen sieht analog zum Reellen wie folgt aus:

[15] Ltv.: 2, S.43

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \ldots = \sum_{v=0}^{\infty} a_v z^v$$

Der Koeffizient a_v, ein beliebiger Faktor, hat hier einen komplexen Wert. z^v ist die komplexe Veränderliche. Überträgt man die Konvergenzkriterien, die den Rahmen dieser Facharbeit übersteigen würden, aus dem Reellen zum Komplexen, kann man zeigen, dass eine Potenzreihe, die für den Wert z^* einen endlichen Grenzwert besitzt, also die an einer Stelle z^* konvergiert, für alle z deren Beträge kleiner sind als der Betrag von z^*, absolut konvergiert. Das bedeutet, dass auch die Reihe ihrer Absolutbeträge

$$|a_0| + |a_1 z| + |a_2 z^2| + |a_3 z^3| + \ldots. = \sum_{v=0}^{\infty} |a_v z^v|$$

konvergiert. Wenn eine Reihe absolut konvergiert, kann man daraus auch ihre gewöhnliche Konvergenz folgern (Majorantenkriterium). Die Gesamtheit der Argumente, für welche die Reihe konvergiert, nennt man den Konvergenzbereich der Reihe.
Wenn man also den Konvergenzbereich einer komplexen Potenzreihe auf der Gaußschen Zahlebene abbildet, erhält man eine Kreisfläche um den Punkt $z = 0$, weil ja alle z, für die gilt $|z| < |z^*|$,ebenfalls im Konvergenzbereich liegen müssen. Den Konvergenzbereich bilden alle z, für die die Potenzreihe absolut konvergiert. Die Begrenzungslinie ist in diesem Fall eine Kreislinie, da ja der Konvergenzbereich in Form einer Kreisfläche vorliegt. Der Radius ϑ dieses Kreises, der auch der Konvergenzradius genannt wird, hängt ganz von der speziellen Gestalt der Potenzreihe ab. Demmig sagt, dass die betreffende Potenzreihe für alle z im Innern des Kreises, $|z| < \vartheta$, überall absolut konvergiert und überall außerhalb des Kreises, $|z| > \vartheta$, divergiert (nicht konvergiert). Auf dem Konvergenzkreis, also wenn $|z|$ gleich dem Konvergenzradius ist könne man keine allgemeingültigen Aussagen machen. Es hänge von der speziellen Gestalt der Potenzreihe ab.

VI.5. Erweiterung der Potenzreihen zu den Laurentreihen[16]

Wir erweitern die Potenzreihe, (wobei z immer eine positive Potenz besaß) , so dass z nun auch negative Potenzen besitzt : $\frac{1}{z}, \frac{1}{z^2}, \frac{1}{z^3}, z^{-4}, z^{-5}, \ldots.$

Eine Laurentreihe ist eine Funktion der Form:

[16] Ltv.: 2, S. 44

$$f(z) = ... + \frac{a_{-3}}{z^3} + \frac{a_{-2}}{z^2} + \frac{a_{-1}}{z} + a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + ... = \sum_{v=-\infty}^{\infty} a_v z^v$$

Unter der Bedingung, dass diese Reihe nach beiden Seiten nicht abbricht, haben wir einen Kreisring um den Koordinatenursprung als den Konvergenzbereich zu erwarten.
Denn für große $|z|$,(Die Reihe in „rechter" Richtung) konvergiert die Reihe auf Grund der immer größer werdenden Potenz von z (siehe Reihe oben) ab einer bestimmten Stelle nicht mehr und an der Stelle befindet sich dann der Konvergenzradius ϑ_1. Für kleine $|z|$ (Reihe in „linker" Richtung) konvergiert die Reihe auf Grund der immer kleiner werdenden negativen Potenzen von z auch nicht mehr. An der Stelle erhalten wir dann einen zweiten Konvergenzradius ϑ_2. (Siehe dazu Grafik :Konvergenzbereich einer Laurentreihe hk2).
Das was die Potenzreihen von den Laurentreihen unterscheidet ist, dass die Koeffizienten a_v der Potenzreihen kein negatives v besitzen, also der zweite Konvergenzradius ϑ_2 gleich Null ist und somit kein Kreisring als Konvergenzbereich, sondern eine Kreisfläche in Frage kommt. Bei einer Laurentreihe, wobei v auch negativ ist, ist der zweite Konvergenzradius ϑ_2 nicht gleich null, da wie schon gesagt die Laurentreihe in „linker" Richtung an einer bestimmten Stelle nicht mehr konvergiert.

VI.6. „Entwicklung" der Laurentreihe um einen Punkt z≠ 0[17]

Wir haben bislang die Reihen mit Potenzen von z betrachtet. Nun wollen wir die Reihen so „entwickeln", dass wir mit Potenzen von $z - z_0$ statt von z, wobei der Entwicklungspunkt z_0 nicht Null sein darf, betrachten. Der neue Mittelpunkt des Kreisrings ist dann zum Punkt z_0 verschoben. Es gelten die aus dem Abschnitt $z - z_0$ übernommenen Konvergenzaussagen.
Das heißt: Der einzige Unterschied ist, dass wir jetzt die Reihe um jeden beliebigen Entwicklungspunkt z_0 betrachten können.

VI.7. Entwicklung gebrochener Polynom - Funktionen in Laurentreihen

Unter Polynom versteht man eine vielgliedrige Summe.
Die vorhin „entwickelte" Laurentreihe für einen beliebigen Entwicklungspunkt lautet:

[17] Ltv.: 2, S.45

$$f(z) = \ldots \frac{a_{-3}}{(z-z_0)^3} + \frac{a_{-2}}{(z-z_0)^2} + \frac{a_{-1}}{z-z_0} + a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + a_3(z-z_0)^3 + \ldots = \sum_{v=-\infty}^{\infty} a_v (z-z_0)$$

Wie wir sehen, wird z, wie bei der „unentwickelten" Laurentreihe nun durch $z-z_0$ ersetzt.

Wenn eine Laurentreihe $f(z)$ nach links abbricht, also wenn es keine Glieder $\frac{a_{-n}}{(z-z_0)^n}$ mehr links von der Abbruchstelle gibt (alle a_{-v} mit $v > n$ verschwinden), so sagt man, die Funktion $f(z)$ habe einen Pol n-ter Ordnung in z_0.

Beispiel: Die Funktion $f(z) = \frac{1}{(z+2i)^2}$ hat demnach einen Entwicklungspunkt bei $z = -2i$.

Sie besitzt einen Pol zweiter Ordnung in diesem Punkt.

VI.8. Die Exponentialfunktion[18]

Die Exponentialfunktion im Komplexen wird analog zum Reellen definiert durch die folgende Potenzreihe: (1)

$$e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \ldots. = \sum_{v=0}^{\infty} \frac{z^v}{v!}$$

Da die Exponentialreihe für alle reellen Werte konvergiert und wir von der Kreisförmigkeit des Konvergenzbereichs auf der Gaußschen Zahlenebene wissen, folgt daraus, dass diese Reihe in der ganzen Gaußschen Zahlenebene konvergiert oder der Kreis unendlich groß ist. Das heißt, dass die Exponentialfunktion durch ihre Reihendarstellung für alle komplexen Zahlen z definiert ist.

VI.9. Die Eulersche Identität

Wir wählen nun z rein imaginär : $z = 0 + 1 \cdot i$ oder in der trigonometrischen Schreibweise: $z = i\varphi$. Wir wollen nun mit Hilfe der oben dargestellten Potenzreihe die Eulersche Identität nachweisen, die bei der Polarkoordinatendarstellung verwendet wird. Die Eulersche Identität lautet: $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$. Nach der obigen Definition in (1) erhält man folgendes, wenn man $i\varphi$ für z einsetzt:

$$e^{i\varphi} = \sum_{v=0}^{\infty} \frac{(i\varphi)^v}{v!} = 1 + i\frac{\varphi}{1!} - \frac{\varphi^2}{2!} - i\frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^4}{4!} + i\frac{\varphi^5}{5!} - \frac{\varphi^6}{6!} - i\frac{\varphi^7}{7!} + \ldots.$$

Zu erklären ist diese Reihe, wenn man bedenkt, dass $i^1 = i, i^2 = -1, i^3 = -i, i^4 = 1, \ldots$ ergibt.

Da diese Reihe absolut konvergiert, also auch die Reihe ihrer Absolutbeträge konvergiert ist es erlaubt, die Reihe umzuordnen.:

$$(2) \qquad e^{i\varphi} = \left(1 - \frac{\varphi^2}{2!} + \frac{\varphi^4}{4!} - \frac{\varphi^6}{6!} + \frac{\varphi^8}{8!} - ....\right) + i\left(\frac{\varphi}{1!} - \frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^5}{5!} - \frac{\varphi^7}{7!} + \frac{\varphi^9}{9!} - .....\right)$$

Es wurde nach dem Prinzip umgeordnet, dass einmal alle Glieder, die i als Vorfaktor hatten zusammengefasst und einmal die Glieder, wo der Wert von i auf Grund der geraden Potenzen einen reellen Wert annahm. In der Summenschreibweise sieht die umgeordnete Reihe wie folgt aus: $\sum_{v=0}^{\infty}(-1)^v \frac{\varphi^{2v}}{(2v)!} + i\sum_{v=0}^{\infty}(-1)^v \frac{\varphi^{2v+1}}{(2v+1)!}$. Man erkennt, dass die erste Reihe der Kosinusreihe im Reellen entspricht und die zweite Reihe entspricht der Sinusreihe.
Die Eulersche Formel ist also eine Zusammenfassung der Sinus- und Kosinusfunktion.
Im Komplexen gilt wie im Reellen das Additionstheorem der Exponentialfunktion:
$e^{z_1+z_2} = e^{z_1} * e^{z_2}$. Daraus erhält man folgende Zerlegung:

$$(3) \qquad e^z = e^{x+iy} = e^x * e^{iy} = e^x(\cos y + i\sin y).$$

Nun dient uns diese vorgenommene Zerlegung als Gleichung, mit deren Hilfe wir nun wichtige Rückschlüsse auf den Verlauf der Exponentialfunktion in der Gaußschen Zahlenebene ziehen können.

VI.10. Nullstellen der Exponentialfunktion

Wir wollen nun die Nullstellen der Exponentialfunktion im Komplexen untersuchen. Dafür setzen wir die Gleichung, die wir in (3) erarbeitet haben gleich Null:
$e^x(\cos y + i\sin y) = 0$. Wir wissen schon, dass die Funktion e^x keine Nullstellen besitzt, also brauchen wir uns um diesen Faktor nicht mehr weiterhin zu kümmern: $\cos y + i\sin y = 0$.
Damit aber diese Gleichung erfüllt ist, müssen die Kosinusfunktion und die Sinusfunktion für dasselbe Argument (nämlich y) Null ergeben. Dies wird jedoch nie der Fall sein, deshalb besitzt die e- Funktion in der ganzen Gaußschen Ebene keine Nullstellen.

VII. Praktische Anwendung (Robert)

VII.1. Fraktale

Fraktale sind Umformungen im Zusammenhang mit der Gaußschen Zahlenebene.
Im Jahre 1945 befasste sich Benoit Mandelbrot zum ersten Mal mit Folgen komplexer Zahlen, dessen grafische Interpretation sehr interessant zu sein schien. Die *iterierten* Diagramme sahen zunächst chaotisch aus, doch man konnte eine gewisse Struktur erkennen - jeder beliebig kleine Ausschnitt des Diagramms sah in der Vergrößerung genauso aus wie das

[18] Ltv.: 2, S. 47

Ganze. Diese Eigenschaft heißt *Selbstähnlichkeit*. Die Figuren nannte Mandelbrot *Fraktale*, was er aus dem lateinischen Wort *fractus* abgeleitet hatte (das heißt gebrochen, geteilt), und beschrieb sie in mehreren Büchern, wie z.B. "Les objects fractals, forn, hasard et dimension" (1975) und "The fractal geometry of nature" (1982).
Das berühmteste Fraktal stellt die Mandelbrot-Menge dar. Man erhält sie mit folgender Formel: $Z_n = Z_{n-1}^{\ 2} + C$, wobei C irgendein Punkt in der Zahlenebene ist (in der Form x + yi). Zur Bestimmung der Punkte, die sich in der Menge befinden, wählt man einen Punkt C und iteriert ihn mit der angegeben Formel. Für jeden Einzelschritt erhält man einen neuen Punkt. Ist die Entfernung zum Ursprung irgendwann größer 2, dann befindet sich der Punkt außerhalb der Mandelbrot-Menge. Bei der Berechnung der Punkte, die innerhalb der Mandelbrot-Menge liegen (Distanz zum Ursprung < 2) ergibt sich allerdings ein Problem, da man die Berechnung ins unendliche führen würde. Also wird eine maximale Anzahl an Berechnungen festgelegt (n). Je größer n ist, desto genauer ist die Bestimmung der Punkte innerhalb der Menge und, damit verbunden, um so größer der zeitliche Aufwand für die Berechnung. Wird also die maximale Anzahl der *Iterationen* erreicht und der Abstand von Z_n zum Ursprung ist immer noch kleiner 2, dann wird angenommen, dass sich Punkt C innerhalb der Menge befindet (Bild und Basic-Programm befinden sich im Anhang).
Fraktale sind keinesfalls rein mathematische Gebilde. Ein einfaches Beispiel sind z.B. die Wolken. Eine Wolke ist wie ein Schwamm, der aus vielen, mikroskopisch-kleinen Tropfen besteht. Wenn man nun ein "Stück" der Wolke entnimmt, dann erkennt man, dass es nicht nur ein "Stück" ist sondern eher eine "kleine Wolke". Als weiteres Beispiel nehmen wir ein Stück Felsen. Wenn man sich den Felsen aus einer bestimmten Perspektive anschaut, dann kann man sich leicht vorstellen, dass man auf einen großen Berg guckt (diese Technik wird auch bei den meisten Filmen benutzt), dabei ist es nur ein kleines Stück. Das gleiche gilt für Feuer, Wasser bzw. ein Farnenblatt: ein Teilstück sieht aus wie das Ganze.
Es hat den Anschein, dass durch Menschen berechnete Fraktale den in der Natur vorkommenden Formen sehr ähnlich sind - die Muster, die dabei entstehen sehen Frost, Blitzen, Ölmustern auf Wasseroberflächen und Galaxien verblüffend ähnlich. Und so stellt sich die Frage, ob der Mensch den ersten Schritt getan hat in Richtung einer mathematischen Formel, die unser Universum beschreibt? Wenn das der Fall wäre, dann wird es uns vielleicht dank komplexen Zahlen möglich sein die Natur perfekt zu imitieren. Und die daraus resultierenden Einsatzmöglichkeiten sind unbegrenzt.

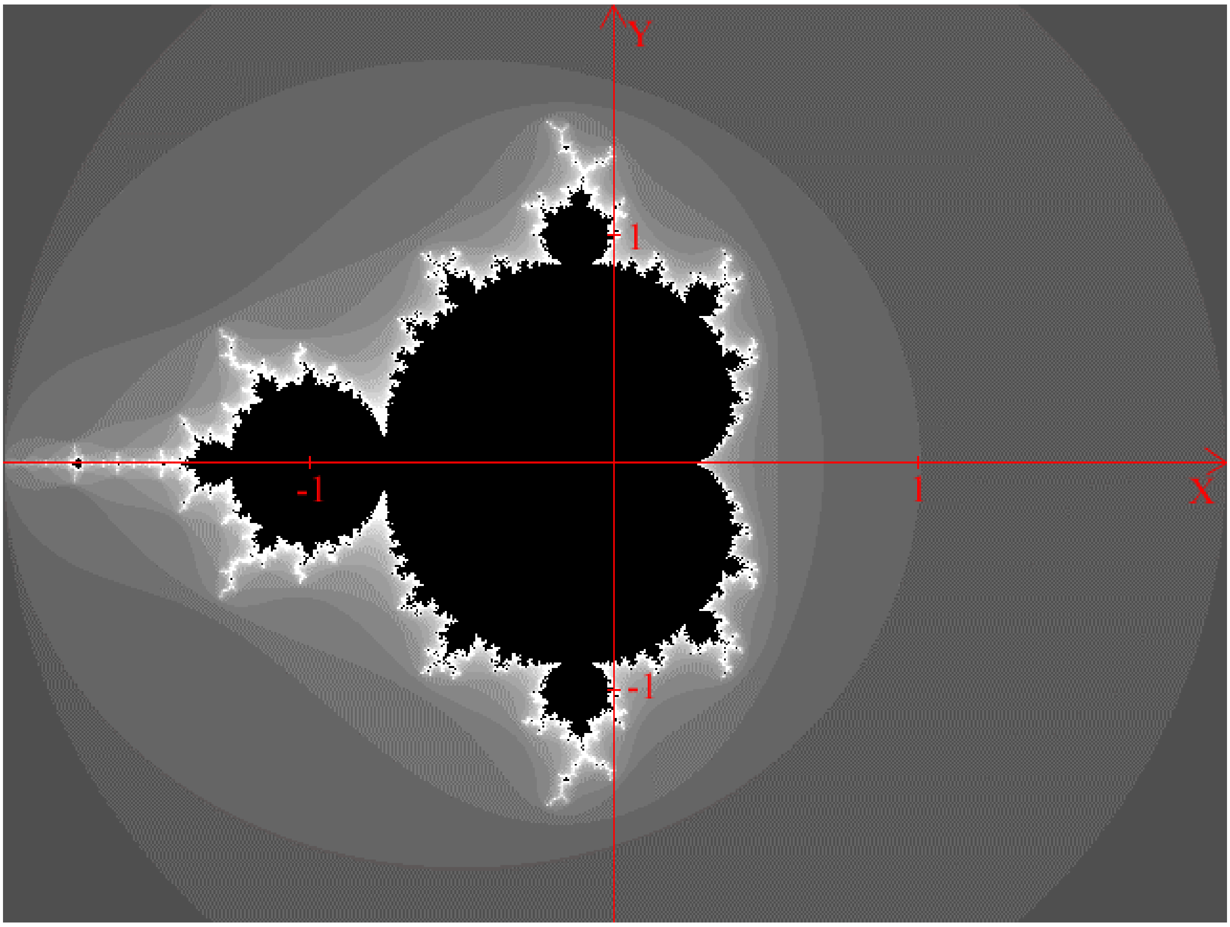
Fraktale Algorithmen eignen sich hervorragend zur Bilddatenkompression. Zu einem gegebenen Bild soll eine Funktion gefunden werden, die bei der *Iteration* das Bild möglichst gut annähert. Dazu muss im Bild nach Selbstähnlichkeiten gesucht werden, also nach Teilbildern, die anderen Teilbildern möglichst ähnlich sind. Diese Funktion zu finden ist nicht ganz einfach, doch es gibt inzwischen Programme mit denen sich Bilder fraktal-komprimieren lassen. Damit erreicht man bei durchschnittlicher Qualität eine 10 bis 100-fache Datenreduktion.
Das BASIC-Programm im Anhang erzeugt ein Mandelbrot-Fraktal. Die verschiedene Färbung der Punkte wird erreicht, indem man zählt, wie viele Iterationen für den Punkt C gebraucht worden sind bis festgestellt wurde, dass sich der Punkt nicht innerhalb der Mandelbrot-Menge befindet. Da alle Punkte, die sich nicht in der Menge befinden, das Bestreben haben ins Unendliche zu iterieren, werden Sie mit entsprechenden Farben versehen. Je heller die Farbe eines Punktes desto kleiner ist sein Bestreben in die Unendlichkeit. Auf der anderen Seite sind alle Punkte, die sich innerhalb der Mandelbrot-Menge befinden, schwarz gefärbt. Die Iteration der Punkte erfolgt in einer doppelt verschachtelten Schleife. Dabei wird der reale und der imaginäre Teil der komplexen Zahl separat berechnet (ZR# und ZI#). Der Abstand vom Ursprung wird mit dem Satz des Pythagoras berechnet.

Schluss

Wir haben nun eine neue Zahlenmenge kennengelernt, die sich von den bisher bekannten Zahlenmengen, auf Grund einer völlig neuen Betrachtungsweise der Zahlenwelt erheblich unterscheidet. In dieser Facharbeit haben wir einen Zugang zu den komplexen Zahlen geschaffen, in dem wir mit dem bereits Bekannten eingestiegen sind und Schritt für Schritt den Umgang mit ihnen erklärt und anhand von konkreten Beispielen dargelegt haben. Das Thema der komplexen Zahlen ist sehr tiefgreifend und weitläufig, so dass wir uns in vielen Bereichen beschränken mussten, um den vorgegebenen Rahmen nicht zu sprengen. So konnten aufwendige Beweisführungen (zum Beispiel den Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra oder die Konvergenzkriterien der komplexen Reihen, sowie Stetigkeit und Differenzierbarkeit von komplexen Funktionen) nicht aufgeführt werden. Auch erforderten gewisse Themenbereiche eine nähere Ausführung, weshalb auf andere Sachverhalte ganz verzichtet werden musste.
In vielen Bereichen konnten wir auf bereits Bekanntes zurückgreifen und die Sachverhalte ohne viel Mühe nachvollziehen.

Anhang

Mandelbrot-Menge und BASIC-Programm

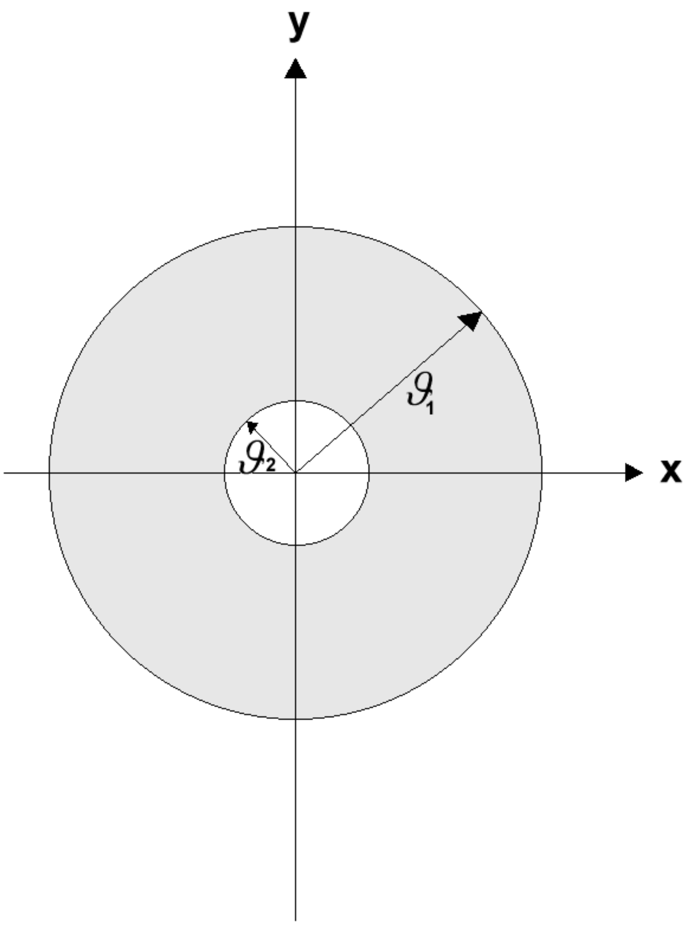



```
SCREEN 13
CLS

FOR X = 20 TO 63
   A$ = HEX$(X)
   IF LEN(A$) < 2 THEN A$ = "0" + A$
   PALETTE X - 20, VAL("&H" + A$ + A$ + A$)
NEXT X

PALETTE 44, 0

FOR Y = 0 TO 199
   FOR X = 0 TO 319
      X# = -2 + X / 64
      Y# = 1.6 - Y / 64
      N = 0
      ZR# = 0
      ZI# = 0
      DO
         ZR0# = ZR# * ZR# - ZI# * ZI# + X#
         ZI# = 2 * ZR# * ZI# + Y#
         ZR# = ZR0#
         N = N + 1
      LOOP UNTIL ZR# * ZR# + ZI# * ZI# > 4 OR N = 44
      PSET (X, Y), N
   NEXT X
NEXT Y
```

Grafiken zum Thema „Komplexe Funktionen“

Konvergenzbereich einer Laurentreihe

Grafik zum Kapitel „Erweiterung der Potenzreihen zu den Laurentreihen“



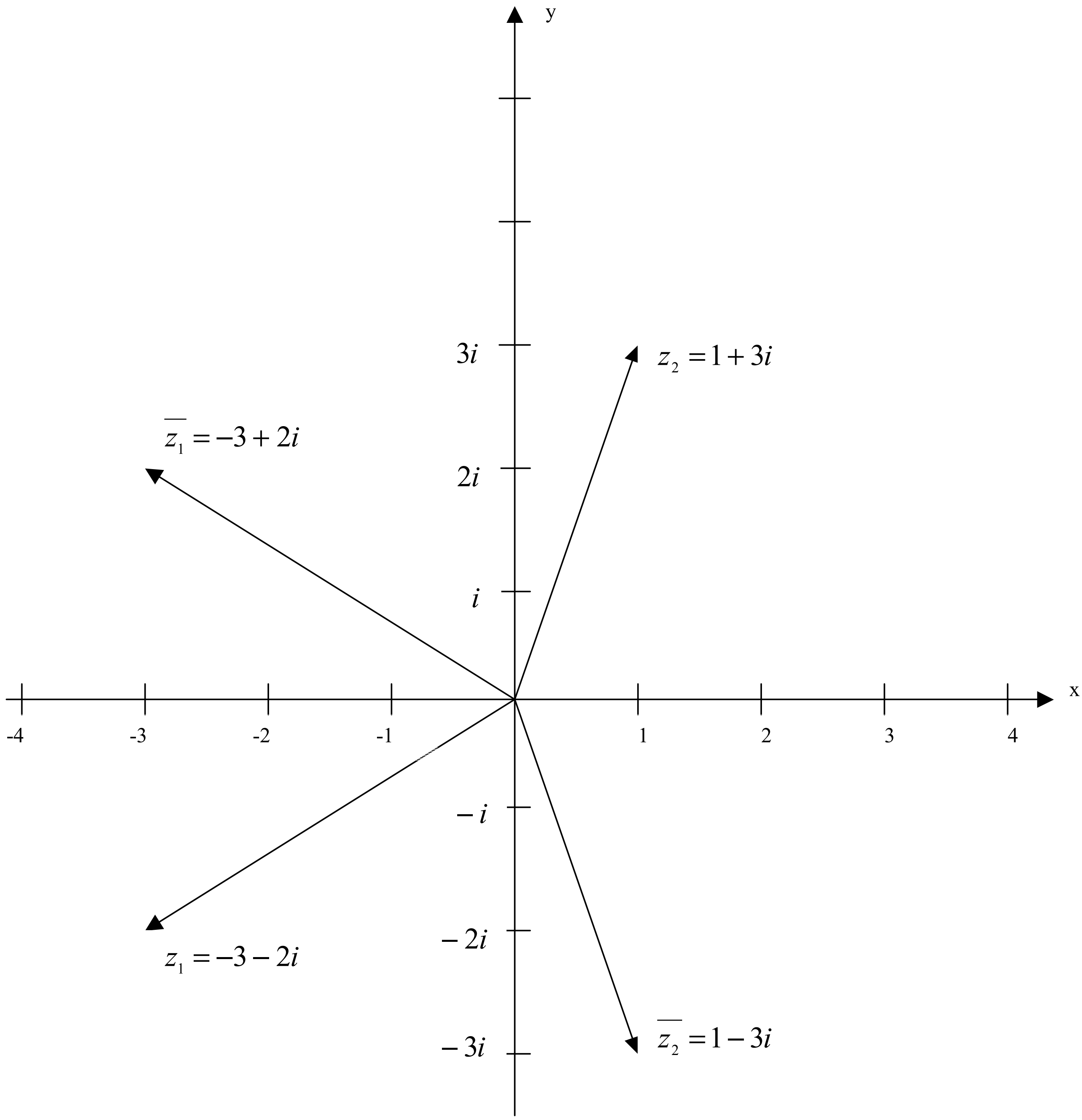
ϑ_1 = Konvergenzradius für „große“ Potenzen von z

ϑ_2 =Konvergenzradius für „kleine“ Potenzen von z

Konvergenzbereich. In diesem Bereich konvergiert die Laurentreihe.

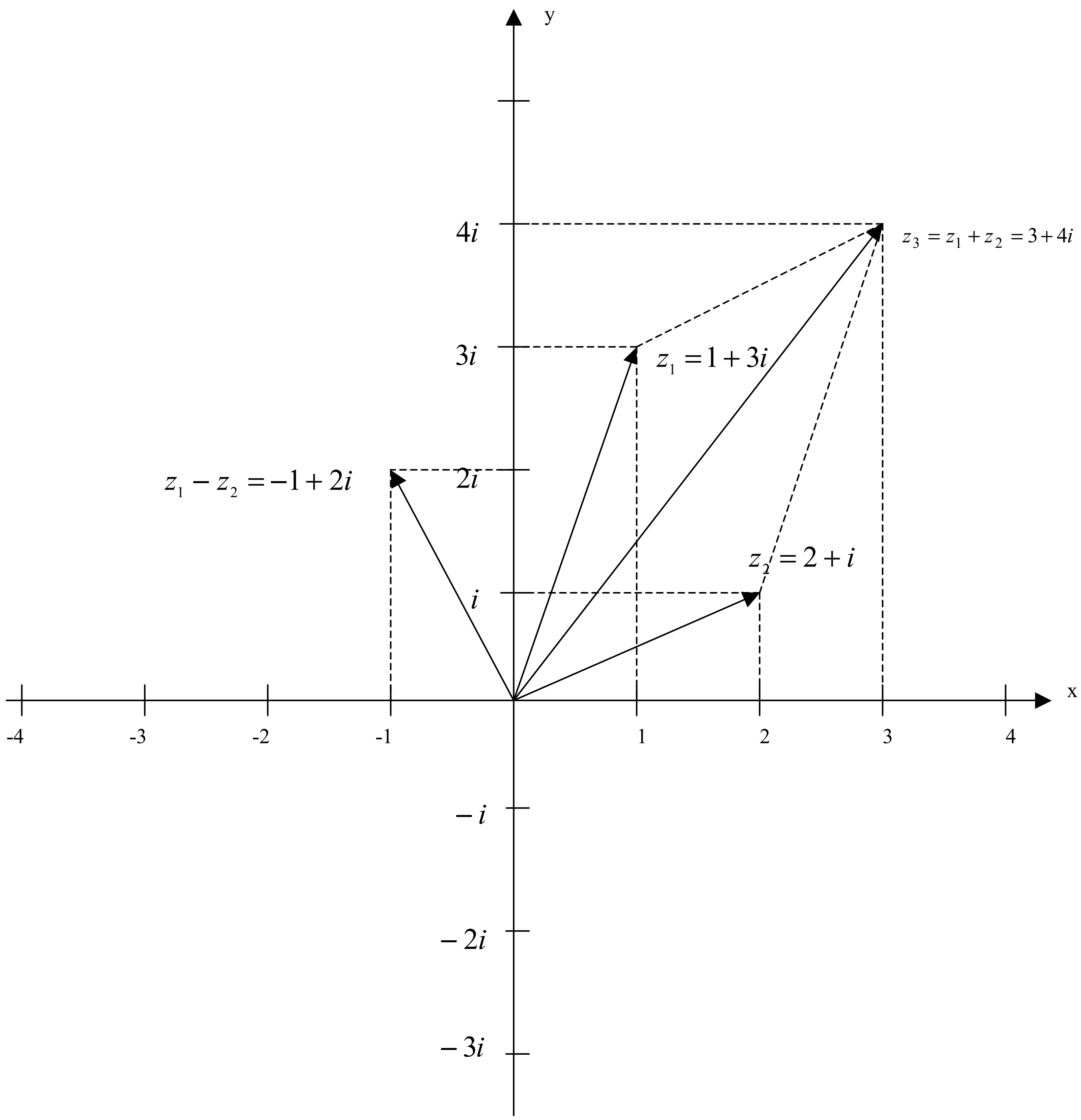
Der helle Bereich stellt den Bereich dar, wo die Reihe divergiert, also keinen Grenzwert für z besitzt.

Die konjugierte komplexe Zahl $\overline{z}$

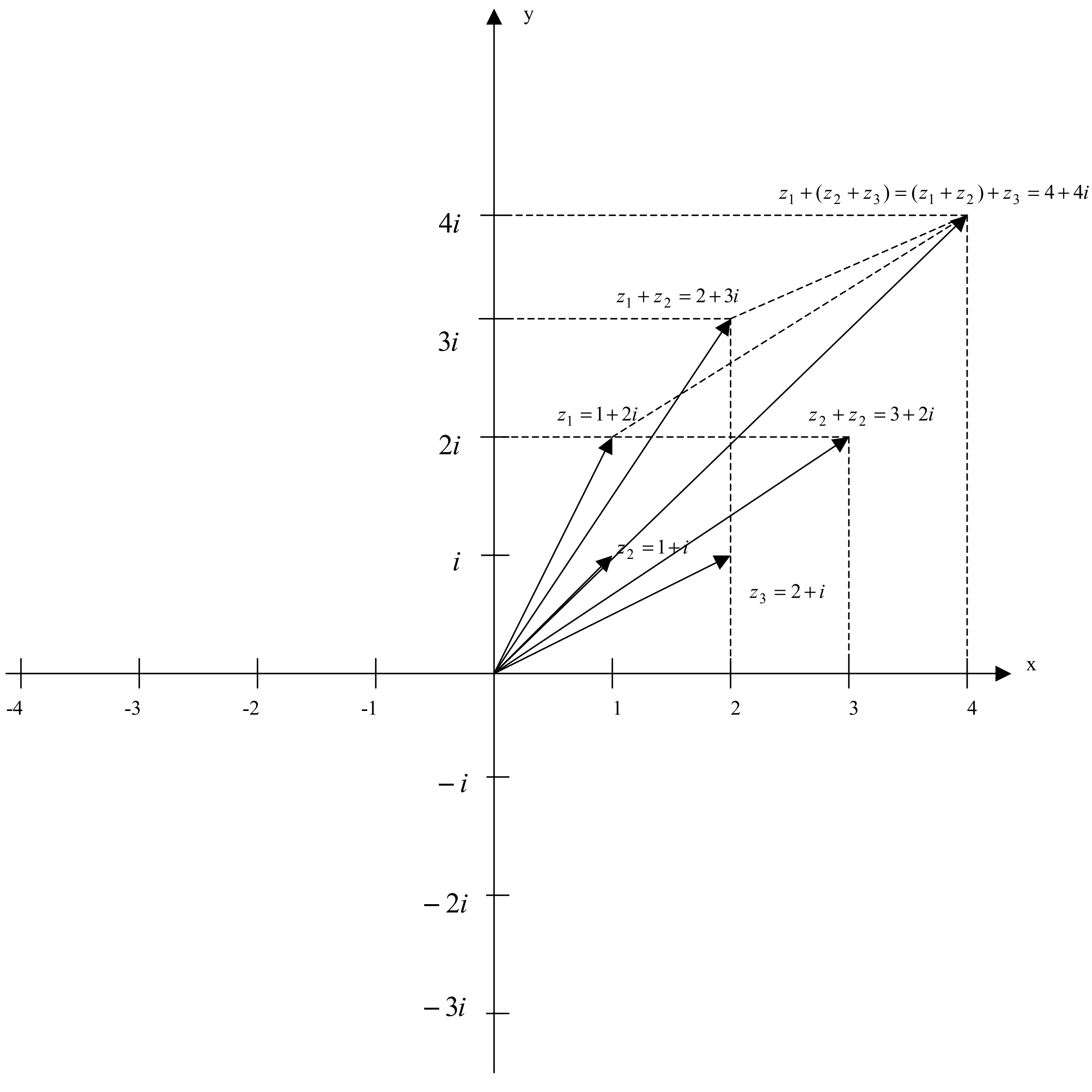


Addition und Subtraktion der Ortsvektoren

In dieser Grafik ist auch die Kommutativität gezeigt, denn der Vektor $\overrightarrow{z_1 z_3} = \overrightarrow{z_2}$ und der Vektor $\overrightarrow{z_2 z_3} = \overrightarrow{z_1}$, also $z_1 + z_2 = z_2 + z_1 = z_3$



Assoziativität der Ortsvektoren



Iterationstabelle aus dem Computerprogramm

```
4.0527 + -1.8506 i
3.2966 + 0.8421 i
2.8438 + -0.4442 i
2.5688 + 0.2594 i
2.3943 + -0.1625 i
2.2791 + 0.1069 i
2.2006 + -0.0729 i
2.1458 + 0.0510 i
2.1068 + -0.0363 i
2.0787 + 0.0262 i
2.0583 + -0.0191 i
2.0433 + 0.0140 i
2.0322 + -0.0103 i
2.0241 + 0.0077 i
2.0180 + -0.0057 i
2.0134 + 0.0042 i
2.0101 + -0.0032 i
2.0075 + 0.0024 i
2.0056 + -0.0018 i
2.0042 + 0.0013 i
```

Literaturverzeichnis

1. Helmut Dittmann

   „Komplexe Zahlen“

   4. Auflage

   Bayerischer Schulbuchverlag, München 1987

2. Gudrun Demmig

   „Komplexe Zahlen – Teil 1“

   3. Auflage

   Demmig Verlag, Stuttgart 1983

3. Helmut Sieber und Leopold Huber

   „Mathematische Formeln“

   Neubearbeitung

   Ernst Klett Verlag GmbH, Stuttgart 1999

4. Herbert Pieper

   „Die komplexen Zahlen“

   3. Auflage

   Verlag: Harri Deutsch, Frankfurt a. M. 1999

Index