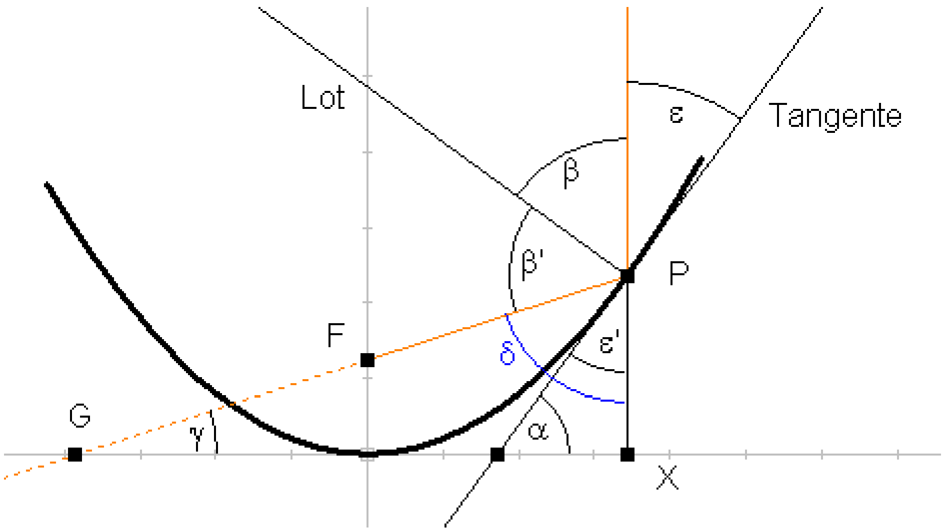
Der Brennpunkt des Parabolspiegels

Das Bild zeigt den Verlauf einer Parabel sowie der Lichtstrahlen, Tangente und Normalen, die für die nachfolgende Herleitung von Bedeutung sind.



Im Folgenden soll bewiesen werden, dass ein Parabolspiegel alle parallel zur optischen Achse einfallenden Lichtstrahlen (orange) in einen Brennpunkt F spiegelt. Der Brennpunkt **F** hat auf der y-Achse den Wert $\underline{n_r}$, was gleichzeitig dem y-Achsen-abschnitt der Geraden $\underline{f_r}$ (orange) durch die Punkte **P**, **F** und **G** entspricht. Mathematisch (auf das Bild übertragen) heißt das, dass eine Parallele zur y-Achse, die in einem Punkt **P(x_P|y_P)** der Funktion **f(x) = ax²** an der Normalen zur Tangente im Punkt **P** gespiegelt wird, die y-Achse für beliebige x_P immer im Punkt **F(0|y_F)** schneidet.

Der Winkel α ergibt sich aus der Steigung der Parabel am Auftreffpunkt des Lichtstrahles. Der Winkel γ ist erforderlich, um die Gerade mit dem y-Achsen-abschnitt n_r zu bestimmen.

1. Zusammenhang zwischen α und γ

1.1	$\beta = \beta'$	Gesetz der Optik
1.2	$\varepsilon = \varepsilon'$	Scheitelwinkel
1.3	$90° + \alpha + \varepsilon' = 180° \rightarrow \varepsilon' = 90° - \alpha$	Winkelsummensatz
1.4	$\beta + \varepsilon = 90° \rightarrow \varepsilon = 90° - \beta$	Lot ist Normale zur Tangente.
1.5	$90° - \beta = 90° - \alpha \rightarrow \alpha = \beta$	Folgt aus 1.2, 1.3, 1.4
1.6	$\delta + \beta + \beta' = 180° \rightarrow \delta = 180° - \beta - \beta'$	Drei Winkel bilden Halbkreis.
1.7	$\delta = 180° - 2\beta$	Folgt aus 1.1, 1.6
1.8	$\delta = 180° - 2\alpha$	Folgt aus 1.5, 1.7
1.9	$90° + \gamma + \delta = 180° \rightarrow \gamma = 90° - \delta$	Winkelsummensatz
1.10	$\gamma = 90° - (180° - 2\alpha) \rightarrow \gamma = 2\alpha - 90°$	Folgt aus 1.8, 1.9

2. Gleichung der Funktion f_r durch die Punkte P, F und G

2.1	$f(x)=ax^2 \rightarrow f'(x)=2ax$	Gleichung der Parabel und die 1. Ableitung
2.2	$f_r(x)=m_r x+n_r \rightarrow n_r=f_r(x)-m_r x$	Grundgleichung der linearen Funktion aufgelöst nach n_r
2.3	$m=f'(x_0)=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{Gegenkathete}{Ankathete}=\tan(\alpha)$	Allgemeiner Zusammenhang zwischen Steigungen
2.4	$n_r=f_r(x)-x\tan(\gamma)$	Folgt aus 2.2, 2.3, siehe Zeichnung
2.5	$P(x_P \mid y_P)\in f_r \quad \text{und} \quad P(x_P \mid y_P)\in f$	P liegt auf f_r und f
2.6	$n_r=f(x_P)-x_P\tan(\gamma)$	Folgt aus 2.4, 2.5
2.7	$=ax_P^2-x_P\tan(\gamma)$	Folgt aus 2.1, 2.6
2.8	$=ax_P^2-x_P\tan(2\alpha-90°)$	Folgt aus 1.9, 2.7
2.9	$\tan(\alpha)=\frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$	Verschiedene trigonometrische Beziehungen, siehe dazu den Einheitskreis mit Kongruenzabbildungen und die Additionstheoreme mit Sonderfall $\alpha=\beta$
2.10	$\sin(\alpha-90°)=-\cos(\alpha)$	
2.11	$\cos(\alpha-90°)=\sin(\alpha)$	
2.12	$\tan(2\alpha)=\frac{2\tan(\alpha)}{1-\tan^2(\alpha)}$	
2.13	$n_r=ax_P^2-x_P\tan(2\alpha-90°)$	Übertragung von 2.8
2.14	$=ax_P^2-x_P\frac{\sin(2\alpha-90°)}{\cos(2\alpha-90°)}$	Folgt aus 2.9, 2.13
2.15	$=ax_P^2+x_P\frac{\sin(2\alpha)}{\cos(2\alpha)}$	Folgt aus 2.10, 2.11, 2.14
2.16	$=ax_P^2+x_P\frac{1}{\tan(2\alpha)}$	Folgt aus 2.9, 2.15
2.17	$=ax_P^2+x_P\frac{1-\tan^2(\alpha)}{2\tan(\alpha)}$	Folgt aus 2.12, 2.16, siehe Zeichnung
2.18	$=ax_P^2+x_P\frac{1-(f'(x_P))^2}{2f'(x_P)}$	Folgt aus 2.1, 2.17
2.19	$=ax_P^2+x_P\frac{1-(2ax_P)^2}{4ax_P}=ax_P^2+\frac{1-(2ax_P)^2}{4ax}$ $=ax_P^2+\frac{1}{4a}-\frac{(2ax_P)^2}{4a}=ax_P^2+\frac{1}{4a}-ax_P^2$	Folgt aus 2.1, 2.18
2.20	$=\frac{1}{4a}$	Folgt aus 2.19
2.21	➔ $F\left(0 \mid \frac{1}{4a}\right) \quad q.e.d.$	Schnittpunkt aller Lichtstrahlen mit der y-Achse.