

Ableitung der Sinus- und Kosinusfunktion mit Hilfe der Additionstheoreme

1. Vorüberlegungen

Es gelten bereits bewiesene oder auch Grundeigenschaften von $\sin(x)$ und $\cos(x)$:

$$1.1 \quad \sin(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \cos(\mathbf{b}) \sin(\mathbf{a}) + \cos(\mathbf{a}) \sin(\mathbf{b})$$

$$1.2 \quad \sin(\mathbf{a} - \mathbf{b}) = \cos(\mathbf{b}) \sin(\mathbf{a}) - \cos(\mathbf{a}) \sin(\mathbf{b})$$

$$1.3 \quad \sin(\mathbf{a}) = -\sin(-\mathbf{a})$$

$$1.4 \quad \cos(\mathbf{a}) = \cos(-\mathbf{a})$$

$$1.5 \quad \cos(\mathbf{a} + 90^\circ) = \sin(\mathbf{a})$$

$$1.6 \quad \sin(90^\circ - \mathbf{a}) = \cos(\mathbf{a})$$

Zusätzlich erforderlich ist der Zusammenhang:

$$1.7 \quad \sin(\mathbf{a}) - \sin(\mathbf{b}) = 2 \cos\left(\frac{\mathbf{a} + \mathbf{b}}{2}\right) \sin\left(\frac{\mathbf{a} - \mathbf{b}}{2}\right)$$

Bew.:

$$1.8.1 \quad \text{Wähle } \mathbf{a} = \mathbf{g} + \mathbf{d} \text{ und } \mathbf{b} = \mathbf{g} - \mathbf{d}$$

$$1.8.2 \quad \Rightarrow \mathbf{d} = \frac{\mathbf{a} - \mathbf{b}}{2} \text{ und } \mathbf{g} = \frac{\mathbf{a} + \mathbf{b}}{2}$$

aus 1.7 mit 1.8.1 und 1.1/1.2 folgt:

$$\begin{aligned} \sin(\mathbf{a}) - \sin(\mathbf{b}) &= \sin(\mathbf{g} + \mathbf{d}) - \sin(\mathbf{g} - \mathbf{d}) \\ &= \cos(\mathbf{d}) \sin(\mathbf{g}) + \cos(\mathbf{g}) \sin(\mathbf{d}) - (\cos(\mathbf{d}) \sin(\mathbf{g}) - \cos(\mathbf{g}) \sin(\mathbf{d})) \\ &= 2 \cos(\mathbf{g}) \sin(\mathbf{d}) \end{aligned}$$

Mit 1.8.2 ergibt sich:

$$\sin(\mathbf{a}) - \sin(\mathbf{b}) = 2 \cos\left(\frac{\mathbf{a} + \mathbf{b}}{2}\right) \sin\left(\frac{\mathbf{a} - \mathbf{b}}{2}\right) \quad \text{q.e.d}$$

$$1.9 \quad \text{Der Zusammenhang } \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin(x)}{x} \right) = 1 \quad \text{soll hier nicht bewiesen werden}$$

2. Ableitung für $f(x)=\sin(x)$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad \text{mit } f(x) = \sin(x) \text{ folgt :}$$

$$\sin'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h} \right)$$

$$= \lim \left(\frac{2 \cos\left(\frac{x+h+x}{2}\right) \sin\left(\frac{x+h-x}{2}\right)}{h} \right)$$

$$= \lim \left(\frac{2 \cos\left(x + \frac{h}{2}\right) \sin\left(\frac{h}{2}\right)}{h} \right)$$

$$= \lim \left(\cos\left(x + \frac{h}{2}\right) \cdot \frac{\sin\left(\frac{h}{2}\right)}{\frac{h}{2}} \right)$$

$$\text{Es gilt : } \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{\sin\left(\frac{h}{2}\right)}{\frac{h}{2}} \right) = 1$$

$$= \cos(x)$$

q.e.d.

d.h. für $f(x)=\sin(x)$ gilt: $f'(x)=\cos(x)$

3. Ableitung für $f(x)=\cos(x)$

3.1 $\cos'(x) = \cos'(90^\circ + \mathbf{a})$ mit $x = 90^\circ + \mathbf{a}$

$= \sin'(\mathbf{a})$ mit 1.5

3.2 $= \cos(\mathbf{a})$ wie bereits bewiesen.

Weiter $\Rightarrow \cos'(90^\circ + \mathbf{a} - 90^\circ) = \cos(\mathbf{a} - 90^\circ)$ mit 3.1 und 3.2

$\Rightarrow \cos'(\mathbf{a}) = \cos(-\mathbf{a} + 90^\circ)$ wg. Achsensymmetrie 1.4

$= \cos(90 - \mathbf{a})$ mit 1.5

$= \sin(-\mathbf{a})$ mit 1.3

$= -\sin(\mathbf{a})$

d.h. für $f(x)=\cos(x)$ gilt: $f'(x)=-\sin(x)$